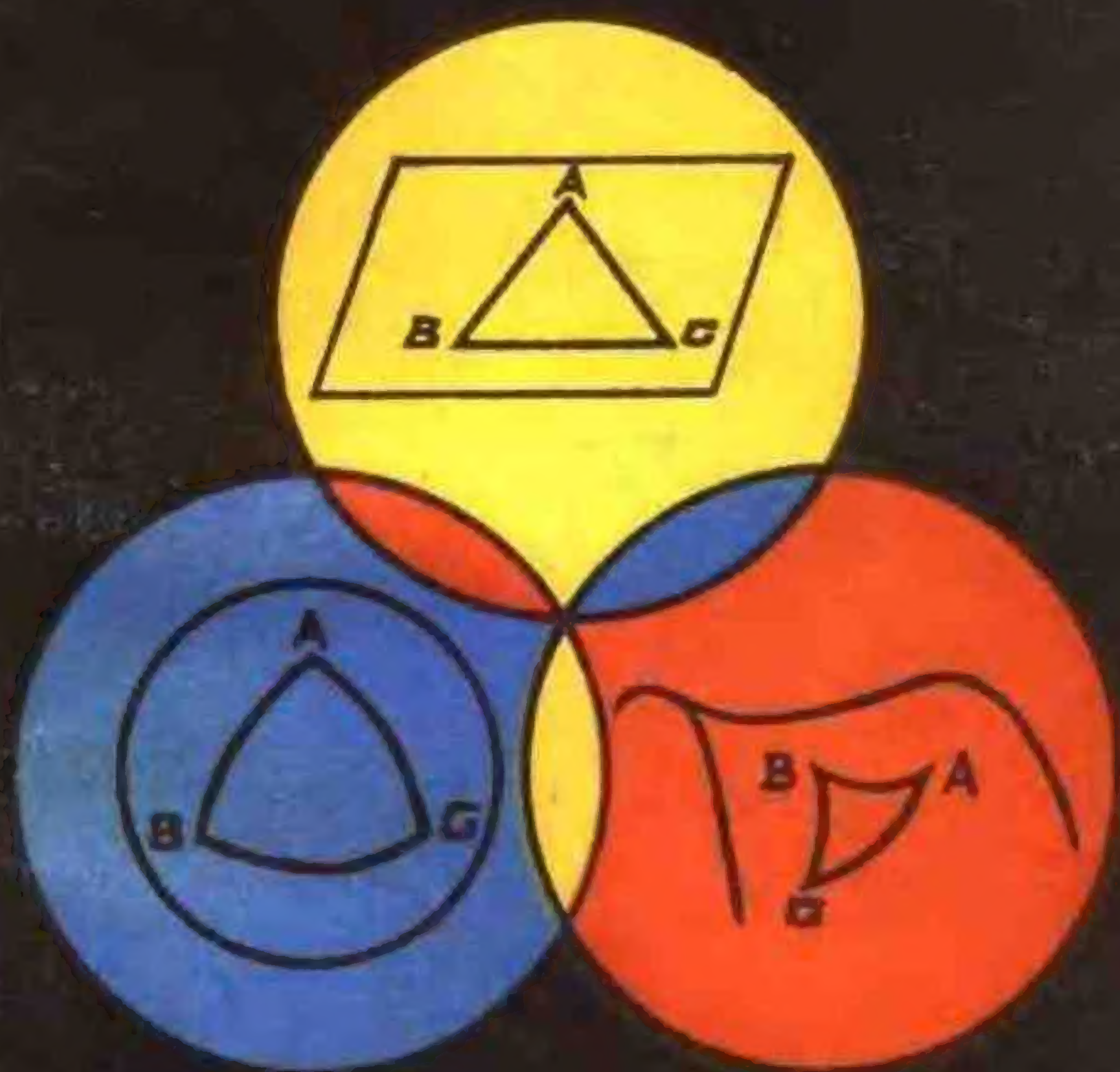
三角形的内角和等于180°吗

王宗儒 编著

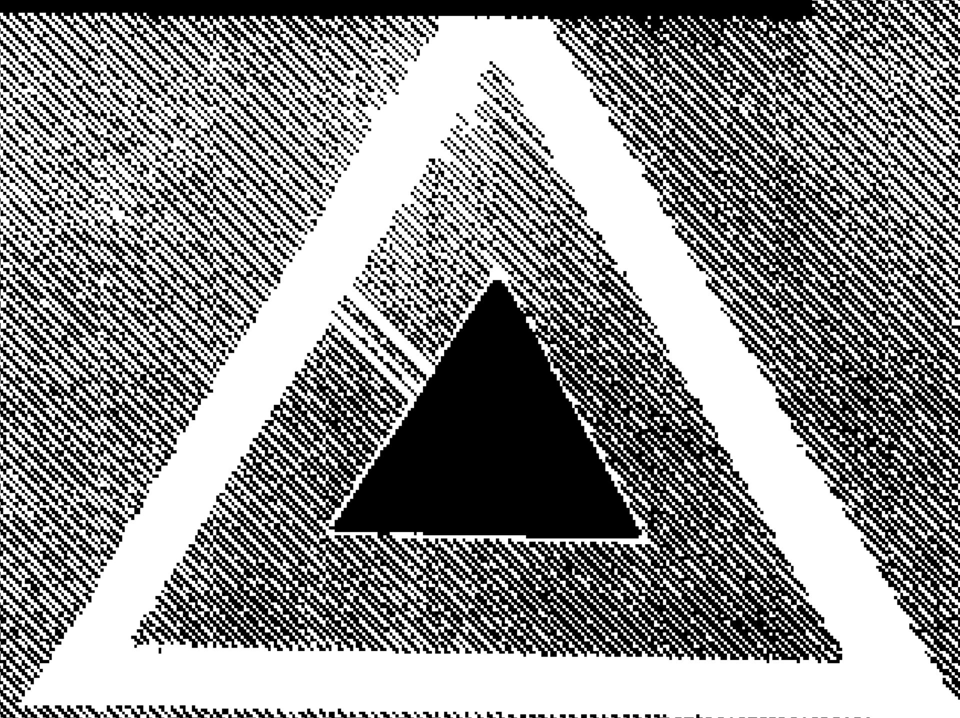


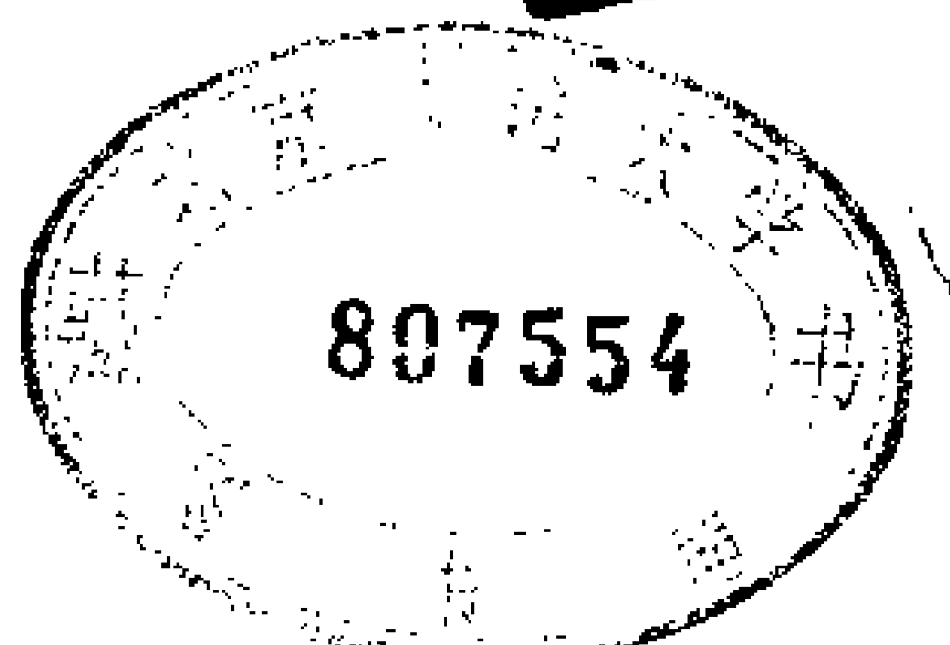


中学生课外读物



中学生课外读物





王宗儒 编著

三角形的内角和等于180°吗

湖南人民出版社

三角形的内角和等于180°吗

王宗儒　编著

责任编辑：孟实华

·

湖南人民出版社出版

（长沙市展览馆路14号）

湖南省新华书店发行　　湖南省新华印刷一厂印刷

·

1981年7月第1版第1次印刷

印张：4.5　印数：1——30,700

统一书号：7109·1325　　定价：0.34元

前　言

这本小册子是为青少年数学爱好者写的，目的是向读者介绍一些有关欧氏几何和非欧几何的初步知识。希望在扩充读者的知识领域，培养逻辑思维能力和发展空间想象能力等方面，能有所帮助。

考虑到非欧几何的逻辑性较强，接受起来并不容易，我采用中学生所熟悉的"三角形三个内角的和等于180°"这个定理作为谈话的引子，把读者引进非欧几何的大门，接着再叙述几何发展的历史过程。在能接受的前提下，证明了38个定理，介绍了"五组公理"和罗巴切夫斯基几何的初步知识，并利用模型对罗巴切夫斯基几何和黎曼几何作了简单的解释。在特定的条件下，把欧氏、罗氏和黎氏三种流派的几何统一起来。最后采用回答问题的方式，用常见的事例来说明非欧几何在现实空间中的实际意义和在相对性原理上的应用，以加深读者对这方面知识的理解。

本书在写作过程中，参阅了希尔伯特著的《几何基础》、科士青著的《几何基础》、钱端壮编的《几何基础》、秦元勋著的《几何学通论》、叶非莫夫著的《高等几何学》、库图左夫著的《罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要》、《微分几何》、《射影几何》、《从一到无穷大》及有关非欧几何的介绍书籍，选择其中某些能被青

少年数学爱好者所能接受的内容，适当地照顾逻辑系统，并加上作者一些不成熟的意见。但由于非欧几何的逻辑性较强，概念较抽象，不太容易用通俗的语言来叙述，加之作者的知识水平和综合能力有限，书中可能存在许多缺点和错误，敬请同志们指正。

早在六十年代，就有向中学生介绍一点关于非欧几何初步知识的想法，由于种种原因，一直没有实现。1978年参加湖南数学学会年会后，明确了数学对实现祖国四个现代化的重要意义，才促使我重新动笔。在写作过程中得到了湖南省数学学会理事长孙本旺教授的支持与鼓励，国防科技大学沙钰同志的许多帮助，谨此致谢。

王宗儒

1980年10月20日

目　录

引　言

从三角形的内角和谈起

"三角形三个内角的和等于180°"这个定理，在中学数学教课书里，占着十分重要的地位。我们回忆一下，诸如相似形、三角函数等有关的内容，都曾用到"三角形三个内角的和等于180°"这个定理。

如果我们设想把"三角形三个内角的和等于180°"这个内容，从现有的教课书里删去，不准采用它，也不准采用同它前后有关的命题去代替的话，我们的教科书会出现什么样的情形呢？它的篇幅肯定会大大减少。因为相似形、勾股定理等内容都不存在了。如果又有人从根本上否定"三角形三个内角之和等于180°"（如果可能的话），在逻辑上又会出现什么"古怪"的结论呢？读者可能会认为提出这样问题的人有些荒唐，然而在漫长的几何学发展过程中，的确出现过这样的历史事实，从而发展成不同流派的几何学。有一派几何学，它的三角形三个内角之和是小于180°的，而另一派几何学，它的三角形三个内角之和是大于180°的。它们不仅在逻辑上没有矛盾，而且和我们在中学里学过的"三角形三个内角的和等于180°"的几何学并存，就是在近代科学里也经常用到它。

这本小册子将向读者介绍一些有关各流派的几何学发展的

历史过程，以及这方面的初步知识，这对于开拓我们的思维，提高我们的逻辑推理能力，发展我们的空间想象能力等方面都会有不同程度的帮助。现在就让我们从三角形的内角和谈起吧！

1
三角形的内角和等于180°吗？

“三角形三个内角的和等于180°”，这在中学几何课里，早已作过证明，当然是无可非议的。这里提出来讨论的目的，不是叫大家怀疑这个定理，而是要求大家真正知道这个定理是怎样证明的，也就是说，证明“三角形三个内角之和等于180°”的根据是什么。

我们知道，证明某一个定理的成立，必须要用排在它前面一些定义和定理作为论据。而每一个定义又必须用排在它前面的概念去定义它；每一个定理也必须用排在它前而的定理作依据去证明它。这样逆推上去，必然会有一些“原始”的概念，不能用逻辑推理的形式来证明。在几何里，对于这些“原始”的概念，称为“基本概念”；这些“原始”的命题，称为“公理”。

证明定理“三角形三个内角的和等于180°”的主要论据是“平行公理”——在一个平面内，过已知直线外的一个已知点，最多只可作一条直线和已知直线平行。

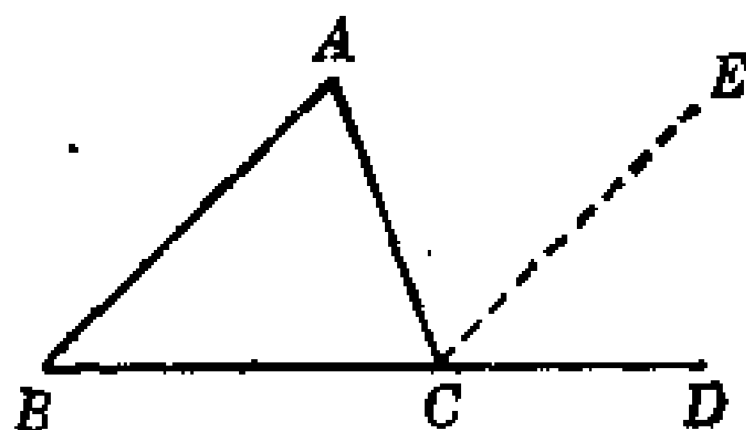


图 1

在现在中学的教科书里，这个定理是这样证明的：

把$\triangle ABC$的BC边延长至D，

作 $CE \parallel BA$,

因 $\angle A = \angle ACE$

$\angle B = \angle ECD$

故 $\angle A + \angle B + \angle C = \angle ACE + \angle ECD + \angle BCA$

$= \angle BCD$

$= 180°$

这里关键的一步是"作 $CE \parallel BA$",这是由平行公理所保证的。就是说,根据平行公理,过 C 点最多只能作一条直线 CE 平行于 BA,因而有内错角 $\angle A = \angle ACE$, 同位角 $\angle B = \angle ECD$。

如果不允许用"平行公理",也不允许用与平行公理等价的命题(关于等价概念,下面还会提到,这里暂时把等价看作相同的意思),就不能得出"三角形三内角的和等于180°"的结论。读者如果不相信的话,不妨试证一下。不过,依我看,这一切都将是徒劳的。因为历史上曾经有不少的数学家企图把平行公理作为一个定理来加以证明,可是都失败了(关于平行公理的试证问题,在下一节里我们还要研究,这里就不多说了)。

为了让读者了解得更清楚,先将下面一些著名的定理作粗略的介绍。必须特别注意,在证明过程中,都没有引用平行公理或与它等价的命题。

定理1 三角形三个内角的和小于或等于二直角。

这个定理是由意大利数学家萨开里(Gerolamo Saccheri 1667—1733)和法国数学家勒让得耳(Adriem Marie Legendia 1752—1833)提出来的,又称为萨开里——勒让得耳第一定理,它的特点是避免引用平行公理。

用反证法证明如下：

证 假如不是这样，那么三角形三内角的和大于二直角。用α、β、γ顺次表示∠A、∠B、∠C，即有

$$\alpha+\beta+\gamma>2d \quad (d\text{表示直角})$$

延长AB并依次取B_1，B_2，B_3，……，B_{n-1}，使$AB=BB_1=B_1B_2=B_2B_3=\cdots=B_{n-2}B_{n-1}=C$

作$\triangle BB_1C_1$，$\triangle B_1B_2C_2$，$\triangle B_2B_3C_3$，……，$\triangle B_{n-2}B_{n-1}C_{n-1}$，使之与$\triangle ABC$全等，这是容易做到的。

用δ表示角差，$\delta=2d-\alpha-\beta$

∵ $\angle CBC_1=\angle C_1B_1C_2=\cdots=\angle C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}=\delta$

$AC=BC_1=B_1C_2=\cdots=B_{n-3}C_{n-2}=B_{n-2}C_{n-1}=b$

$BC=B_1C_1=B_2C_2=\cdots=B_{n-1}C_{n-1}=a$

∴ $\triangle CBC_1$，$\triangle C_1B_1C_2$，$\triangle C_2B_2C_3$，…，$\triangle C_{n-2}B_{n-2}C_{n-1}$都是全等三角形。

故 $CC_1=C_1C_2=C_2C_3=\cdots=C_{n-2}C_{n-1}=e$

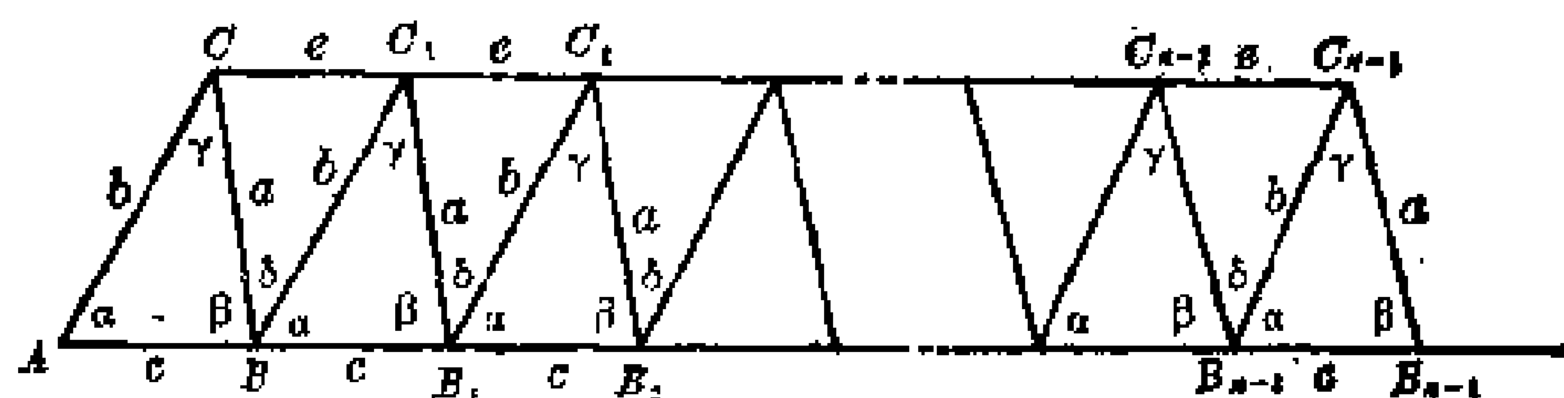


图 2

由于 $\gamma>2d-\alpha-\beta$

而 $\delta=2d-\alpha-\beta$

$\therefore\quad \gamma>\delta$

在$\triangle ABC$和$\triangle C_1BC$中，$AC=C_1B$，$BC=BC$，$\gamma>\delta$

故有 $C>e$ 即差$c-e$是一个正数。

又$\because$ $ACC_1C_2\cdots C_{n-1}B_{n-1}$ 是折线段，

而 $ABB_1B_2\cdots B_{n-1}$是直线段，

$\therefore\quad AC+CC_1+C_1C_2+\cdots+C_{n-2}C_{n-1}+C_{n-1}B_{n-1}$
$>AB_{n-1}$

于是得 $b+(n-1)e+a>nc$

即得 $n(c-e)<a+b-e$ (A)

在不等式(A)的右边，

$\because$ $a+b>e$ （△两边和大于第三边）

$\therefore$ $a+b-e$ 是一个正数，用l表示。

(A)式左边的n是可以任意选定的正整数，这是因为三角形的个数$(n-1)$是可以随着点B_1，B_2，…，B_{n-1}的个数而任意作出的。而$(c-e)$是一个正数，用m来表示，那么(A)式就是：$n\cdot m<l$这是不可能的。

因为，总可以找到这样的n，使得

$n\cdot m>l$ 成立。

例如 线段 $PQ=l$

我们总可以重复n次，

使$n\cdot m=P_1Q_1>PQ=l$

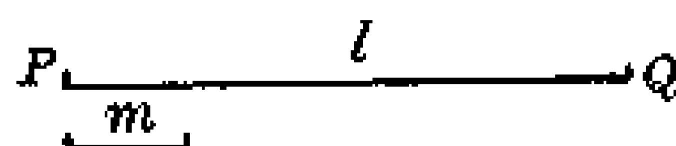




图 3

这就是常说的阿基米德（Archimedes 公元前287—212）命题。

对于本问题来说，我们总有这样的n，使$n(c-e)>a+b-e$

所以不等式(A) $n(c-e)<a+b-e$ 是不成立的。

因此必须否定　$\alpha+\beta+\gamma>2d$　这个假定。

那么　$\alpha+\beta+\gamma\leqslant 2d$　　得到证明。

也就是："任意三角形三内角的和小于或等于二直角"得到证明。

推论1　三角形的任一外角大于其不相邻的任一内角。

证　设Φ是$\triangle ABC$中任一角的外角，α，β，γ是$\triangle ABC$的内角，

那么　$\Phi=\pi-\gamma$

又由本定理　$\alpha+\beta+\gamma\leqslant\pi$

就有　$\Phi\geqslant\alpha+\beta$

但　$\alpha>0$；$\beta>0$

所以　$\Phi>\alpha$，　$\Phi>\beta$

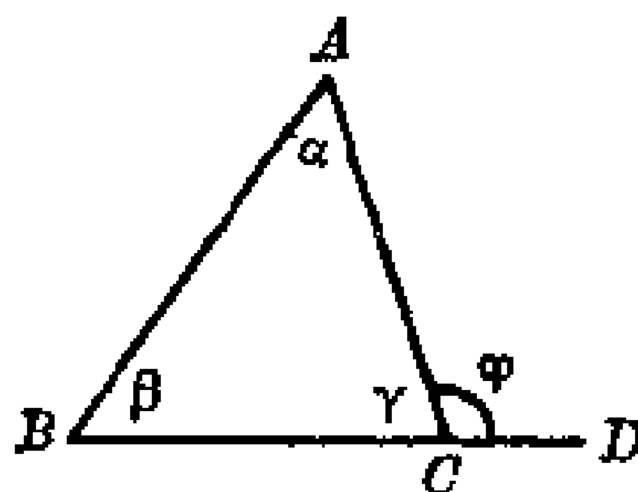


图 4

推论2　两条直线与第三条直线相交所成的同位角相等，那么这两条直线不相交。

证　设直线ED，FG与直线PQ相交于A、B，且同位角$\angle PAD=\alpha=\angle PBG=\beta$

如果AD与BG相交于一点C，就构成$\triangle ABC$，它的一个外角$\angle PAC$等于不相邻的内角$\angle ABC$了，这与推论1矛盾。

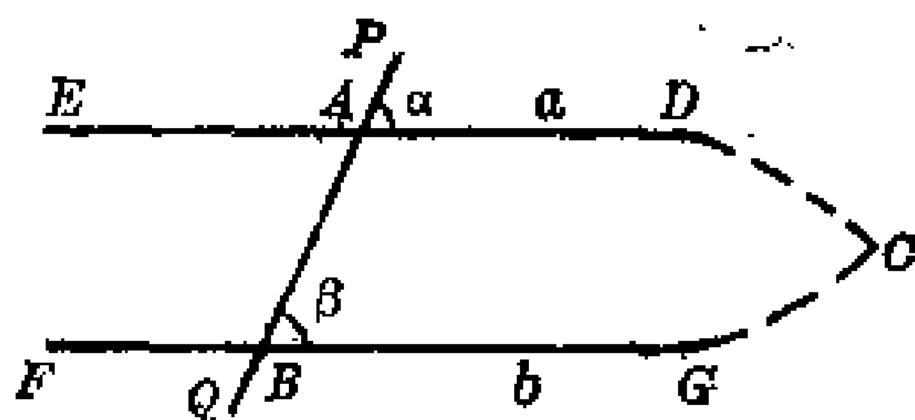


图 5

所以ED与FG不相交。

请你注意，定理证明的全过程，在逻辑上是没有错误的。如果你仔细推敲一下，你对这将会感到非常有趣。因为它与我

们平日熟知的"三角形内角和等于180°"的结果比起来，不太相同，其实这也没有什么奇怪的。如果我们注意到这里没有引用平行公理，而且符号"≤"的意义是"小于或者等于"，它并没有排斥"等于"这个可能。就是说"三角形三内角的和或者小于180°，或者等于180°"，两者都是有可能的。在这个前提下，我们再引用平行公理的话，那就必然会得到"三角形三内角的和等于180°"的结论。这就是我们在中学里所学的几何学，称为欧基里得(Euclid公元前330—275)几何学。至于在什么情况下"三角形三内角之和小于180°"，这是另一流派罗巴切夫斯基几何学。我们在下面还要比较详细地研究它。它有一些初看上去简直不能令人相信的，但在逻辑上又丝毫没有漏洞的几何定理，这将引起我们更大的兴趣，它不仅可以开阔我们的眼界，而且还能够锻炼我们的推理能力。

为了讨论上的方便，这里介绍一个在非欧几何里十分重要的概念：

定义1　设四边形$ABCD$的边AB上的两角是直角，且与AB相邻的两边AD、BC相等。这种四边形称为萨开里四边形，AB称为下底边，CD称为上底边，AD、BC称为侧边。

定理2　萨开里四边形两底边中点的连线垂直于两底，且上底边上的两角相等。

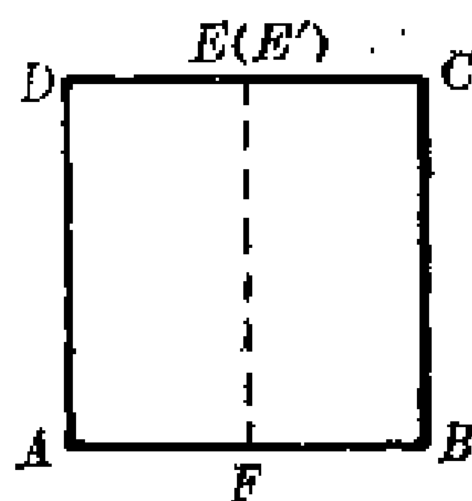


图 6

设E，F是AB，DC的中点，过F引$E'F\perp AB$，E'是FE'与DC的交点，E'必在DC线段的内部（可由顺序公理保

证）。

以$E'F$为轴，将$FADE'$旋转，使与图形$FE'CB$所在平面相合为止。

∵　$FA \perp FE'$，$FB \perp FE'$

且　$AF = FB$

∴　FA与FB重合，A与B重合。

又因　$DA \perp AB$，$CB \perp AB$

且　$AD = BC$

∴　AD重合于BC，D与C重合。

从而　$DE' = E'C$

就是说，E'和E重合。同时$\angle ADC$与$\angle BCE$也重合。这样就证明了，萨氏四边形两底中点的联线垂直于两底，且上底边上的两个角相等。

谈到这里，你可能又会出现这样的想法："既然AD、CB都垂直于AB，它们是平行线，且又是相等线，那就是平行四边形了，而且已经有$\angle A = \angle B = 90°$。那么$ABCD$已经是矩形了。"这种想法是在已经采用了平行公理之后，才能成立；可是我们一再声明过，我们是在没有用"平行公理"的情况下来论证的，在这种情况下，根本不可能得出四角形四个角之和等于四直角的结论。不仅我们初学者会有这种不全面的想法，就是萨开里当时也曾作过三种假设：

(1)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是锐角，称为锐角假设；

(2)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是直角，称为直角假设；

(3)　$\angle ADC$和$\angle BCD$都是钝角，称为钝角假设。

萨开里当时得到一个结论：钝角假设不能成立，因为它与定理1矛盾．如果直角假设成立，那么萨开里四边形，就是初等几何中的矩形了，这时欧基里得的平行公理应该成立。萨开里当时想用归谬法排斥锐角假设，借此来证明平行公理，但是今天我们知道萨氏这种尝试工作是不会成功的（下面还会谈到公理的独立性，那时，你就会理解问题的实质了）。

现在再向你介绍萨开里——勒让得耳第二定理．这个定理证明过程较繁，但更深入地反映了逻辑推理的严密性，应该细心地体会它。

定理3 （萨开里—勒让得耳第二定理）

如果存在某一个三角形的内角和等于$2d$，那么任何三角形内角和也等于$2d$（d表示直角）。

设$\triangle ABC$的内角和 $\sigma=\angle A+\angle B+\angle C=2d$ 我们要证明任何三角形的内角和也等于$2d$。

为了证明这个定理，我们先证明下面四个引理。

引理1 $\triangle ABC$的任一贯线CD（D在AB内部）划分出来的三角形的内角和等于$2d$。

证 贯线CD把$\triangle ABC$划分成两个三角形ADC和DBC，设他们的内角和为σ_1和σ_2，

就有 $\sigma_1=\alpha+\beta_1+\gamma_1$

$$\sigma_2=\alpha_2+\beta+\gamma_2$$

$$\begin{aligned}\sigma_1+\sigma_2&=\alpha+\beta+(\gamma_1+\gamma_2)+(\beta_1+\alpha_2)\\&=\alpha+\beta+\gamma+2d\\&=2d+2d\end{aligned}$$

$$= 4d$$

但由定理1　$\sigma_1 \leqslant 2d$，$\sigma_2 \leqslant 2d$

只有当取　$\sigma_1 = 2d$，$\sigma_2 = 2d$ 时，才能满足　$\sigma_1 + \sigma_2 = 4d$ 的要求。

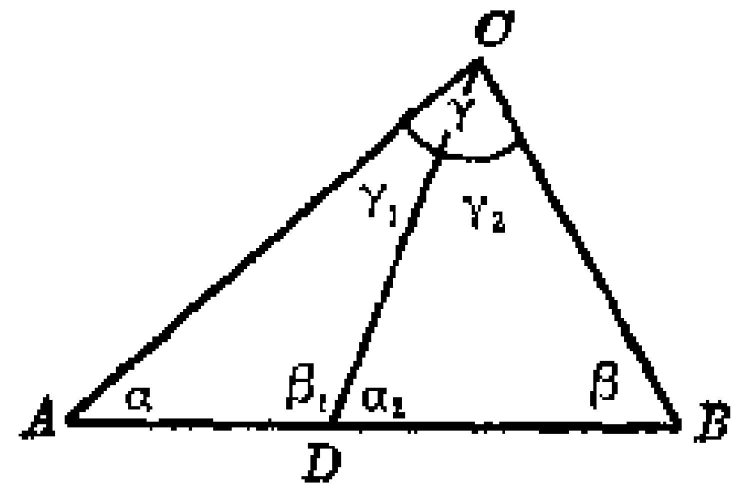


图 7

所以，$\triangle ADC$ 和 $\triangle DBC$ 的内角和都等于$2d$。

引理2　用$\triangle ABC$的贯线划分出来的直角三角形的内角和等于$2d$。

证　设$\triangle ABC$ 的最大边 AB 上的高是CF，则F介于A，B之间，这是因为 AB 是最大边。这时CF是$\triangle ABC$ 的贯线，划分出直角$\triangle BCF$。

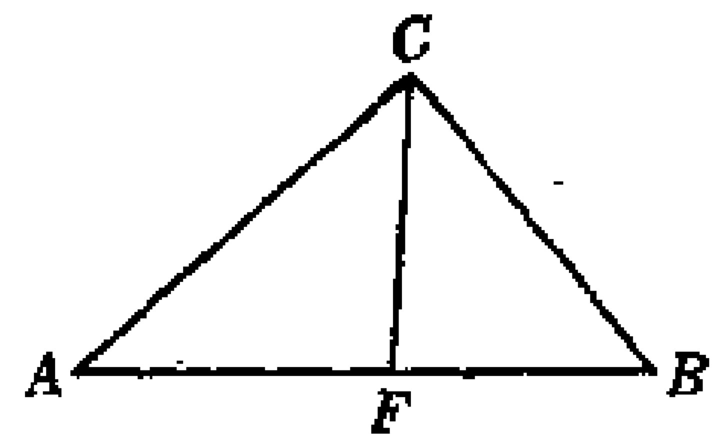


图 8

由引理1，直角三角形BCF的内角和等于$2d$。

引理3　设一直角三角形的一条直角边是直角$\triangle BFC$的一条直角边BF的整数倍，而另一条直角边等于CF，那么，这个直角三角形的内角和也等于$2d$。

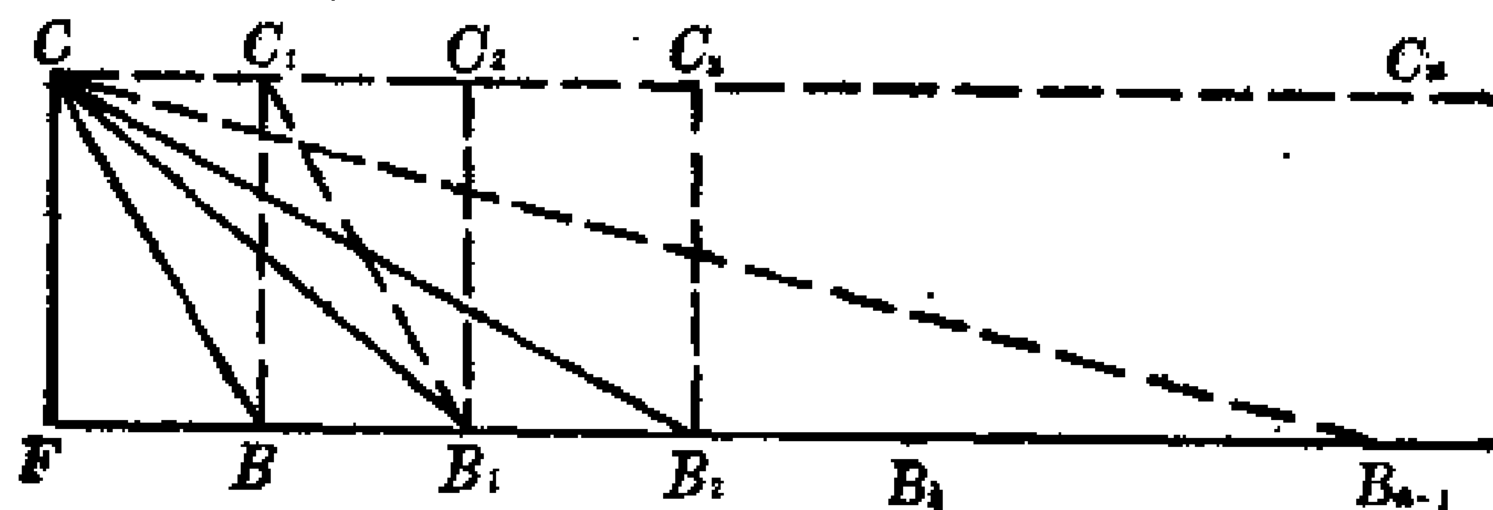


图 9

证 延长FB，

使 $FB=BB_1=B_1B_2=\cdots=B_{n-2}B_{n-1}$

这里B_1介于B、B_2之间，B_2介于B_1、B_3之间，……

作 $BC_1\perp FB$，取 $BC_1=FC$

由于 $\angle BCF=2d-\angle BFC-\angle FBC=d-\angle FBC=\angle CBC_1$

故 $\triangle BFC$，$\triangle CC_1B$是全等三角形（两边及夹角对应相等）。

得 $\angle BC_1C=\angle CFB=d$

又∵ 四边形FBC_1C中$\angle F=\angle B=d$，且 $FC=BC_1$，由定义1，四边形FBC_1C是萨开里四边形。

由定理2，FBC_1C上底边的两角 $\angle FCC_1=\angle BC_1C$

已证明 $\angle BC_1C=d$

故 $\angle C_1CF=d$

∴ 四边形FBC_1C的四个角都是直角。

用同样的方法，作 $B_1C_2\perp BB_1$，且使 $B_1C_2=BC_1$，易证$\triangle B_1BC_1$和$\triangle BFC$是全等形，因而$\triangle BB_1C_1$的内角和也等于$2d$，而四边形$BB_1C_2C_1$四个内角都是直角，这样一来FB_1C_2C成的四个角都是直角的四边形。

因而$\triangle B_1FC$的内角和等于四边形FB_1C_2C内角和的一半，这就是说直角三角形B_1FC的内角和等于$2d$。

同样，作 $B_2C_3\perp B_1B_2$，取 $B_2C_3=B_1C_2$ 之后，可证得四边形B_2FCC_3 的内角都是直角，因而直角三角形B_2FC的内角和等于$2d$。

……

如此进行$n-1$次，便得到直角三角形$B_{n-1}FC$，它的一条直角边FB_{n-1}是FB的n倍，而另一条直角边CF与直角三角形CFB公共，而直角三角形$B_{n-1}FC$的内角和也等于$2d$。

（请注意：这里不能引用“四角形的内角和等于四直角”作为根据，因为它与“三角形内角和等于二直角”是等价的。）

引理4 任何直角三角形的内角和等于二直角。

证 设$\triangle BFC$是内角和等于二直角的直角三角形，$\triangle PQR$是任意直角三角形，我们要证明$\triangle PQR$的内角和也等于二直角。

可以选取这样的正整数m和n，使 $F'B_{n-1}=n\cdot FB>PQ$，$F'C_{m-1}=m\cdot FC>PR$，以$F'C_{m-1}$和$F'B_{n-1}$为直角边作直角三角形$B_{n-1}F'C_{m-1}$，在边$F'B_{n-1}$取内点B'、Q'，使$F'B'=FB$，$F'Q'=PQ$。在边$F'C_{m-1}$上取内点C'、R'，使$F'C'=FC$ $F'R'=PR$。

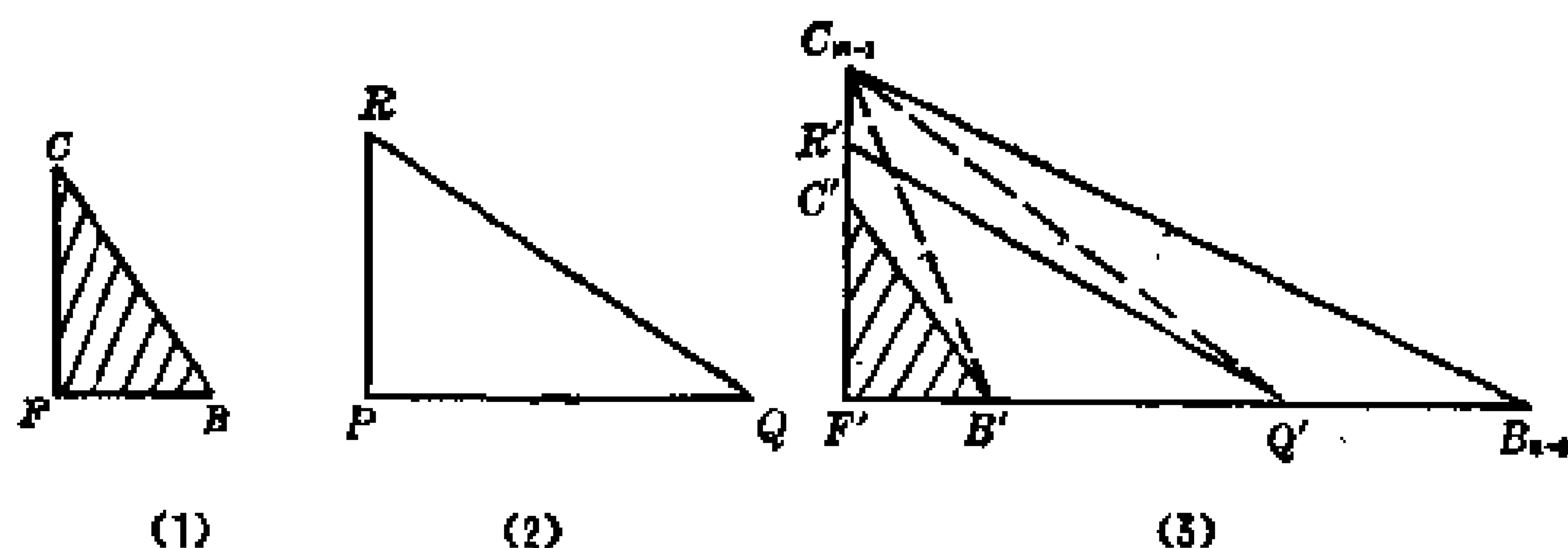


图 10

那么，三角形BFC，$B'F'C'$是全等形，PQR，$F'Q'R'$也是全等形。

由于直角三角形 $B'F'C'$ 的内角和等于 $2d$，而且 $F'C_{m-1}$ 是$F'C'$的m倍，$F'B'$公共，由引理3，知直角三角形$B'F'C_{m-1}$的内角和也等于$2d$。

又$F'B_{n-1}$是$F'B'$的n倍，而三角形 $B'F'C_{m-1}$的内角和等于$2d$。$F'C_{m-1}$公共，由引理3，知直角三角形 $B_{n-1}F'C_{m-1}$ d的内角和也等于2。

现在三角形$F'Q'C_{m-1}$是用贯线$C_{m-1}Q'$从三角形$B_{n-1}F'C_{m-1}$中划分出来的，按引理1，三角形 $F'Q'C_{m-1}$的内角和等于$2d$。

又三角形$F'Q'R'$是用贯线$Q'R'$从三角形 $F'Q'C_{m-1}$中划分出来的，按引理1，三角形$F'Q'R'$的内角和等于$2d$。

但三角形$F'Q'R'$，PQR是全等形，所以三角形PQR的内角和等于$2d$。

现在我们来证明任何三角形的内角和等于$2d$。

设任意三角形GHK的最大边GH上的高是KM，M必介于G、H之间，这时得到直角三角形GKM和HKM，按引理4，任何直角三角形的内角和等于$2d$，

∴ 直角三角形GKM的内角和

$$\sigma_1 = 2d$$

直角三角形HKM的内角和

$$\sigma_2 = 2d$$

故 三角形GHK的内角和

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 - 2d$$
$$= 2d$$

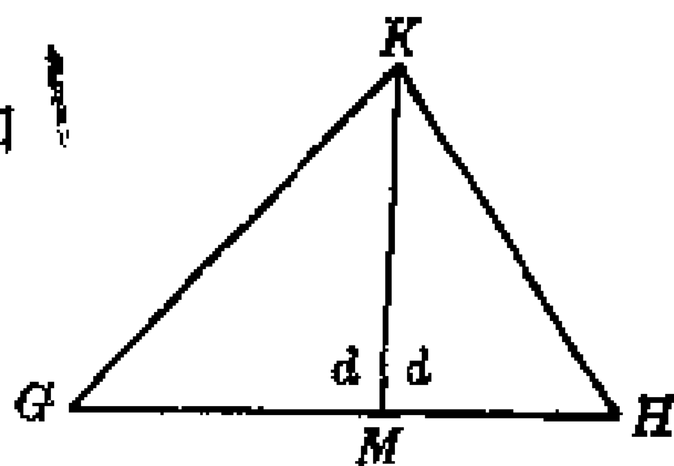


图 11

这样我们证明了："如果存在某一个三角形的内角和等于二直角，则任何三角形的内角和也等于二直角。"

请读者注意，上面所述的萨开里——勒让得耳的两个定理是研究三角形内角和的基本定理，在萨开里——勒让得耳第一定理证明的过程中，完全没有采用平行公理或者同平行公理等价的命题。虽然尚不能证明任意三角形的内角和等于$2d$，但我们已经确实知道三角形内角和不能大于$2d$了。又由萨开里—勒让得耳第二定理知道，如果某一个三角形内角和等于$2d$的话，那么任何三角形的内角和都等于$2d$了。当然我们会联想到："如果某一个三角形内角和小于$2d$，那么任何三角形内角和都小于$2d$"是否也成立呢？回答是肯定的，它可直接由萨开里—勒让得耳的两个定理推出。因此有人称它为萨开里—勒让得耳第三定理。

定理4 （萨开里—勒让得耳第三定理）

如果存在某一个三角形的三内角和小于二直角，则任意三角形的三内角和也小于二直角。

证 由萨开里—勒让得耳第一定理，任意三角形的内角和小于或等于$2d$，即不能大于$2d$，已知$\triangle ABC$的内角和小于$2d$，求证任一三角形PQR的内角和小于$2d$。

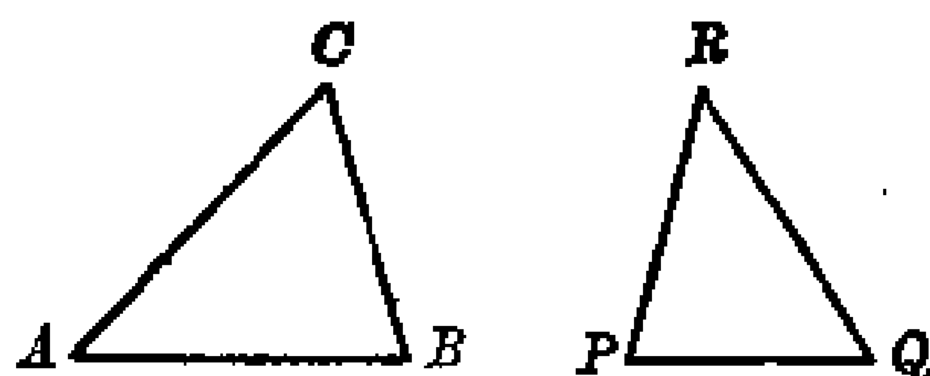


图 12

如果有某一个三角形PQR的内角和不小于$2d$的话，那么，三角形PQR只能等于$2d$。由萨开里—勒让得耳第二定理得知，

如果三角形PQR等于$2d$的话，那么所有三角形的内角和也等于$2d$，那当然包括$\triangle ABC$在内，就是说，$\triangle ABC$的内角和等于$2d$。这是与已知矛盾的。所以任意三角形的内角和等于$2d$是不成立的。于是任意三角形内角和必小于$2d$。本定理已经得到证明。

根据上面一系列的论证，我们有充分理由得知：在不采用平行公理的前提下，三角形的内角和不能大于二直角。这已在萨开里—勒让得耳第一定理中得到证明。因此，有人提出：是否仍使用反证法来证明三角形内角和不能小于二直角呢？即在假设三角形内角和小于二直角的情况下，也出现了矛盾．如果真能做到这一步，那么在不采用平行公理的情况下，“三角形内角和等于二直角”也就得到了证明。这将是了不起的成就，因为他解决了历史上二千年来遗留下来的问题。有这种想法的人，不仅今天有，就是历史上也曾有过这样的数学家，在他们的证明过程中，不知不觉地出现了隐藏很深的错误，一时很难被人们发现。例如数学家勒让得耳就曾有过这样一个错误的证明：“三角形内角和不能小于二直角，”称为勒让得耳定理。后来还是他自己发现了证明中出现了错误。现在把他当时的证明过程写出来，请大家在证明的全过程中，察看勒让得耳的错误究竟在那里，这对我们的逻辑思维能力将是一次严格的锻炼。

定义2 角亏——二直角与三角形内角和的差，称为角亏，记作 $\delta=2d-(\angle A+\angle B+\angle C)$ $(\delta>0)$

定义3 角余——三角形内角和与二直角的差，称为角余，记作 $\lambda=(\angle A+\angle B+\angle C)-2d$ $(\lambda>0)$

勒让得耳定理：“三角形内角和不能小于二直角”的错误证明：

证 用归谬法。假定三角形ABC的内角和$(\alpha+\beta+\gamma)$小于二直角，

即 角亏 $\delta=2d-(\alpha+\beta+\gamma)>0$

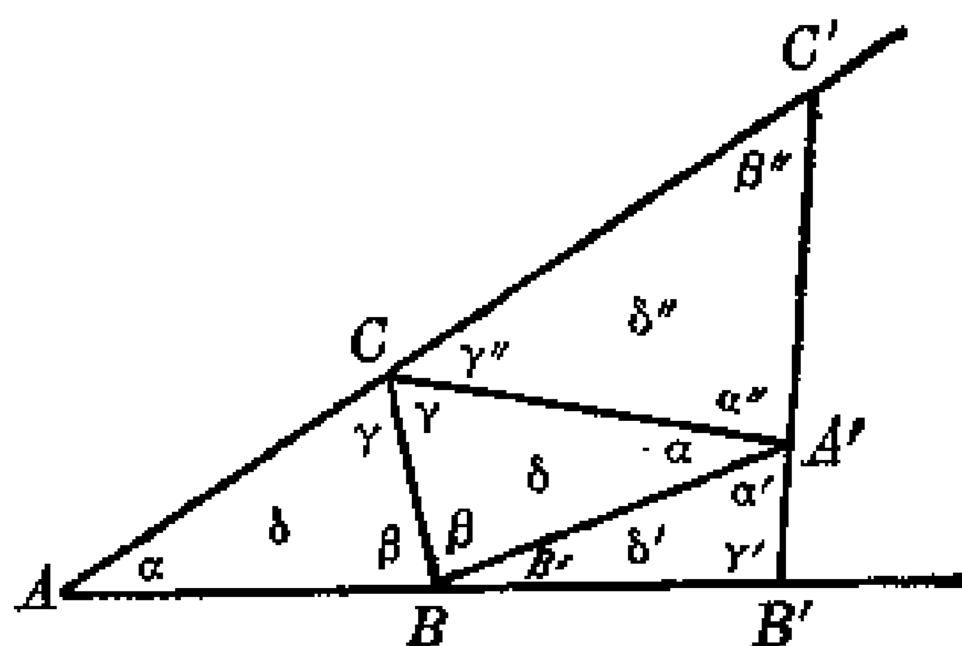


图 13

作一点A'，使A和A'关于BC对称。（若三角形 ABC 为锐角三角形，则A'在$\angle BAC$内部，对于任意三角形ABC来说，命$\angle A$为最大角，也可得同样的结果。）

因为$\triangle A'BC$全同于它的对称$\triangle ABC$，所以它们有相等的内角和，当然有相同的角亏δ。

将AB和AC延长，过A'作一条与$\angle A$的两边AB，AC交于两点B'、C'的截线。

现在要证明$\triangle AB'C'$的角亏δ_1大于$\triangle ABC$的角亏δ的二倍。即 不等式 $\delta_1>2\delta$ 成立。

$\triangle BB'A'$和$\triangle CC'A'$各角如图13所示，则它们的角亏分别等于 $\delta'=2d-(\alpha'+\beta'+\gamma')$

$$\delta''=2d-(\alpha''+\beta''+\gamma'')$$

另外还有下列诸式：

$\alpha+\alpha'+\alpha''=2d$ 即 $2d-(\alpha+\alpha'+\alpha'')=0$

$2\beta+\beta'=2d$ $\quad 2d-(2\beta+\beta')=0$

$2\gamma+\gamma''=2d$ $\quad 2d-(2\gamma+\gamma'')=0$

利用这些式子，可以求出$\triangle AB'C'$的角亏δ_1。

$$\delta_1 = 2d-(\alpha+\beta''+\gamma')$$
$$=2d-(\alpha+\beta''+\gamma)+[2d-(\alpha+\alpha'+\alpha'')]+[2d-(2\beta+\beta')]+[2d-(2\gamma+\gamma'')]$$
$$=[2d-(\alpha+\beta+\gamma)]+[2d-(\alpha+\beta+\gamma)]+[2d-(\alpha'+\beta'+\gamma')]+[2d-(\alpha''+\beta''+\gamma'')]$$
$$=\delta+\delta+\delta'+\delta''$$
$$=2\delta+\delta'+\delta''$$

$\because\ \delta'>0\quad \delta''>0$

$\therefore\ \delta_1>2\delta$

对$\triangle AB'C'$，用同样的方法可以作$\triangle AB''C''$，其角亏δ_2，那么

$$\delta_2>2\delta_1>2^2\delta$$

以此类推，可以作出这样的三角形，其角亏 $\delta_n>2^n\delta$。

如果选择这种作法中的数n充分之大，则可找到这样的三角形存在，其角亏要多大就有多大，但这是不可能的。因为任意三角形的角亏等于 $2d-(\alpha+\beta+\gamma)$，它不能超过$2d$。即不管怎样总是 $\delta_n\leqslant 2d$ 的，所以导致了矛盾。从而三角形三内角之和小于二直角不能成立。这样就证明了三角形内角和不能小于二直角。

大家不要忘记，这个证明是有错误的。这个隐晦的错误，并不是什么粗心的过失，后来勒让得耳自己找出了错误。

问题在于：在推演过程中，未加证明而含糊地采用了一个微妙的、和欧氏平行公理等价的命题。让我们回忆一下三角形$AB'C'$的作法吧。在角BAC内取定一定A'，通过A'作一截线

$B'C'$,不加证明而认为此截线和角BAC的两边AB,AC都一定相交。换句话说，不加证明而采用了这样的命题："不管A'点取在$\angle BAC$内部什么地方，永远可以通过它作一直线与此角的两边都相交。"这个命题是与欧氏平行公理等价的(后面还要证明)。这就意味着已经应用到平行公理了。勒让得耳又犯了"循环论证"的错误，有人把这种类型的错误叫做"兜圈子"。

从历史上各数学家的工作中知道：如果假定三角形内角和小于二直角的话，在逻辑上是找不出矛盾的。因此不采用欧氏平行公理(包括与它等价的命题)，要想证明三角形内角和等于二直角是不可能的。所以，我们可以这样说：

1. 如果不引用欧氏平行公理（或者与平行公理等价的命题），那么三角形三内角之和小于或等于二直角。

2. 如果在上述基础上，再加上平行公理的应用，那么三角形三内角之和等于二直角。

现在，不禁要问：三角形的内角和在什么情况下会小于二直角呢？

对这个问题的回答，不是很简单的，我们将在下面各节里，分别回答这个问题。不过读者要有充分的思想准备，因为在某些场合下，它同我们平日的一些传统观念会出现矛盾。然而这些矛盾又会从几何学发展的历史演变过程中，最后得到科学的完满的解决。

2
欧几里得《几何原本》的成就与缺点

从历史事实知道，几何学的发生和发展，是与生产和生活紧密地联系在一起的。公元前三世纪时，欧几里得整理了前人的资料，按照逻辑相关的次序排列起来，而完成巨著《几何原本》十三卷（有的数学家认为是十五卷，但后二卷是否欧氏原著，存疑）。欧基里得对于各命题之间，力求有着严密的逻辑系统，他追求逻辑地建立几何学，他对于点、直线……等都企图给予定义，并规定一些公设公理，他不论命题本身是否浅显，也不论直观上是否显然，凡是可以证明的命题，他就不厌其烦地加以证明。例如命题“如在圆周上任取二点，那么，通过这二点的直线必通过圆的内部。”从图形的直观上说，是明显的事实。但是他为了避免直观地接受这个事实，还是从公理及已证明的定理中，给予逻辑的证明。这正是欧几里得渴求的目标，也是后来许多数学家建立几何学的目标，他为后来的学者打开了通向几何学的道路。两千多年来，几乎所有的数学家都曾精心地学习和研究过《几何原本》，就是现代的中学几何教科书，也不过是换用了一些近代的名词，基本上采用了他的主要内容。他的成就是值得称赞的。

但是，《几何原本》里仍然存在一些缺点，有些观点还是采

用了直观，并没有做到按逻辑法则建立几何学的目的。正如同我们在中学里所学的几何一样，对于某些场合，并没有严格的证明，有时是凭直观承认它，有时是默认通过，缺乏逻辑依据，其体现在：

1. 没有提到直线与圆弧上的点的连续性，就是说，没有连续公理。例如直线AB与圆弧$\overset{\frown}{CD}$相交于P，如果允许直线和圆弧上的点不连续的话，那么，P点就不一定存在了。图14的三种情况，说明如果直线和圆弧上的点不是连续的话，它们就可能从“间歇”中穿过去，而不存在交点了。

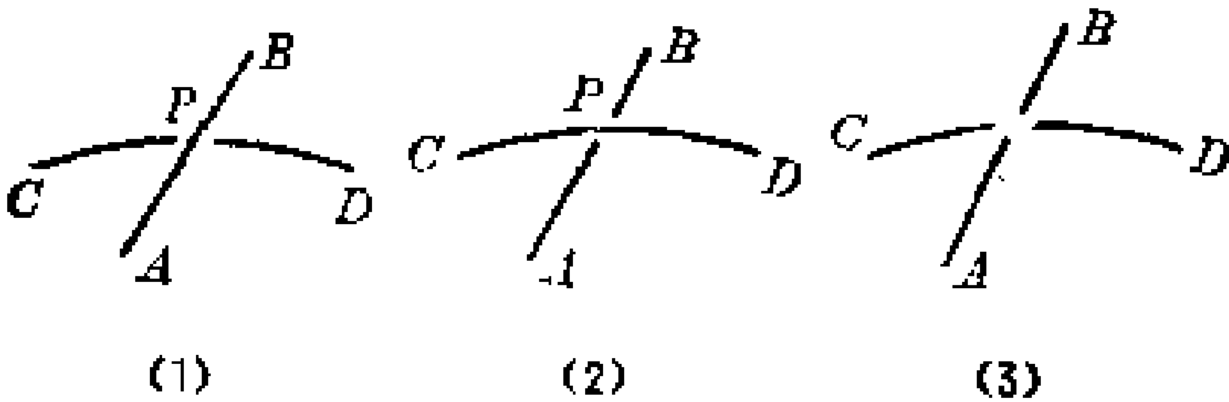


图 14

2. 没有提到图形经过运动后，形状、大小的不变性。例如，“在一个三角形的两边及夹角对应地等于另一个三角形的两边及夹角，则这两个三角形全等”的证明中，必须把一个三角形经过运动，才能把它重合到另一个三角形上去，这就是运动的概念。一条线段或一个角经过运动后，它们的长度、大小是否变化了？是否弯曲了？这都是值得考虑的问题。由于在各个不同的地点，物质受到外界环境的影响（如引力、磁场等），在运动中变了形是经常的事情，因此，我们必须规定经过运动后，直线的性质、线段的长度、角度的大小、图形的形状不变，

才能保证把一个图形搬到另一个图形上时，根据已给条件合同，就是说缺乏合同公理。

3. 用直观代替了顺序概念。

例如在证明命题"每个三角形大边对着大角"时，在大边AB上取AD等于小边AC，连DC，那么DC介于CA，CB之间，就完全是凭直观的。欧几里得事先未作任何关于顺序的规定来作为推证命题的依据，就是说缺乏顺序公理。

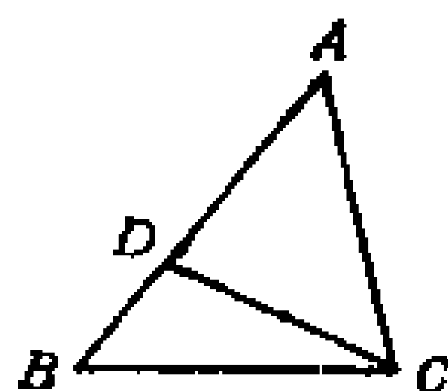


图 15

为了说明顺序公理的重要性，现在从反面回答一个有名的几何诡辩："凡三角形都是等腰三角形."当然这只是一种诡辩，而不是证明.但是由于缺乏顺序公理，才会有这样的错误结论。问题是这样的：

已知 $\triangle ABC$是任意三角形，

求证 $AB=AC$

证 作$\angle A$的平分线AT，作BC的中垂线DK。

分下面两种情况：

1° 如果 $AT \parallel DK$ （如图16）

$\because$ $KD \perp BC$

$\therefore$ $AT \perp BC$

又已知AT平分$\angle A$，

$\therefore$ $\triangle ABT \cong \triangle ATC$ $(rt.s.a)$

$\therefore$ $AB=AC$

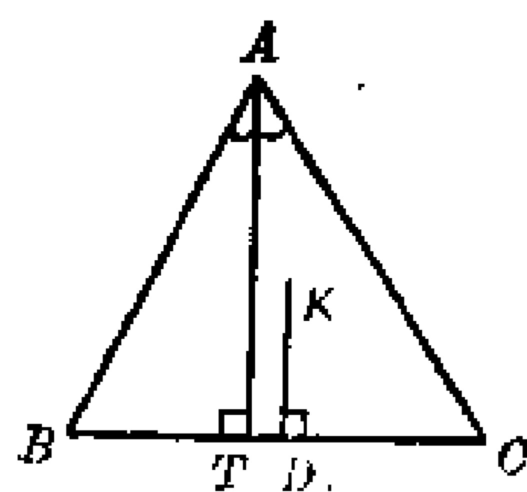


图 16

2° 如果AT与DK相交，这时可分三种情况：

(1) 交点在BC边上(如图17)。那么交点就是BC的中点D，延长AD至E，使 $DE=AD$，

又 $BD=DC$

∴ $ABEC$是平行四边形。但对角线AE平分它的对角，

∴ $ABEC$是菱形，

∴ $AB=AC$

(2) 交点在$\triangle ABC$内部(如图18)。设交点为O，作

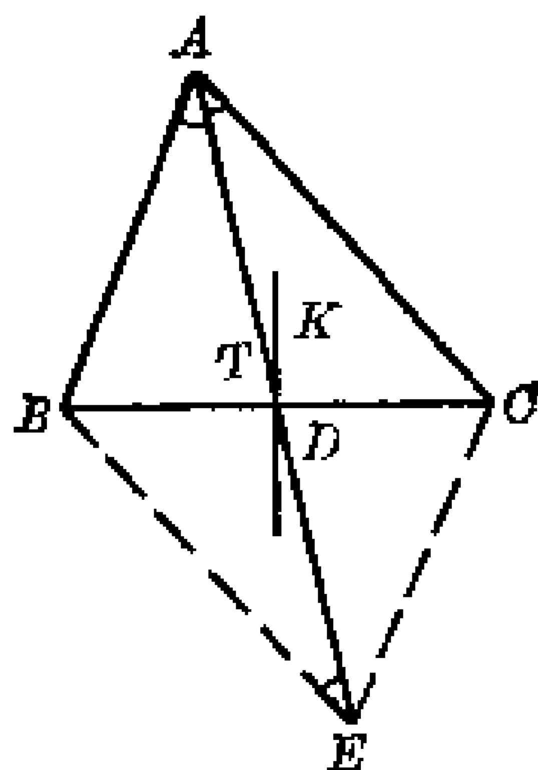


图 17

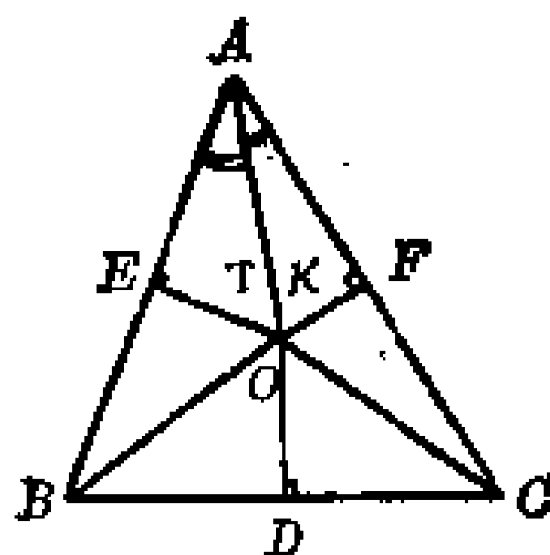


图 18

$OE\perp AB$，$OF\perp AC$

则 $\triangle OEA\cong\triangle OFA$ （直角、锐角、斜边相等）

∴ $OE=OF$，$AE=AF$ ①

又因为OD是BC边的中垂线，那么 $\triangle OBD\cong\triangle ODC$

∴ $OB=OC$

又在直角三角形OBE，OFC中，有 $OE=OF$，$OB=OC$，那么

$\triangle OBE\cong\triangle OCF$

$\therefore \quad EB = FC$ ②

将①、②两式相加 $AE + EB = AF + FC$

$\therefore \quad AB = AC$

(3) 交点△ABC外部一点C，作OE、OF分别垂直AB、AC的延长线于E、F，

则 $\triangle OEA \cong \triangle OFA$ （直角、锐角、斜边相等）

$\therefore \quad OE = CF, \quad AE = AF$ ③

又 $\triangle ODB \cong \triangle ODC, \quad OB = OC$

从而 $\triangle OEB \cong \triangle OFC$

(直角边，直角，斜边相等)

从而 $BE = CF$ ④

从③减去④，

$AE - BE = AF - CF$

$\therefore \quad AB = AC$

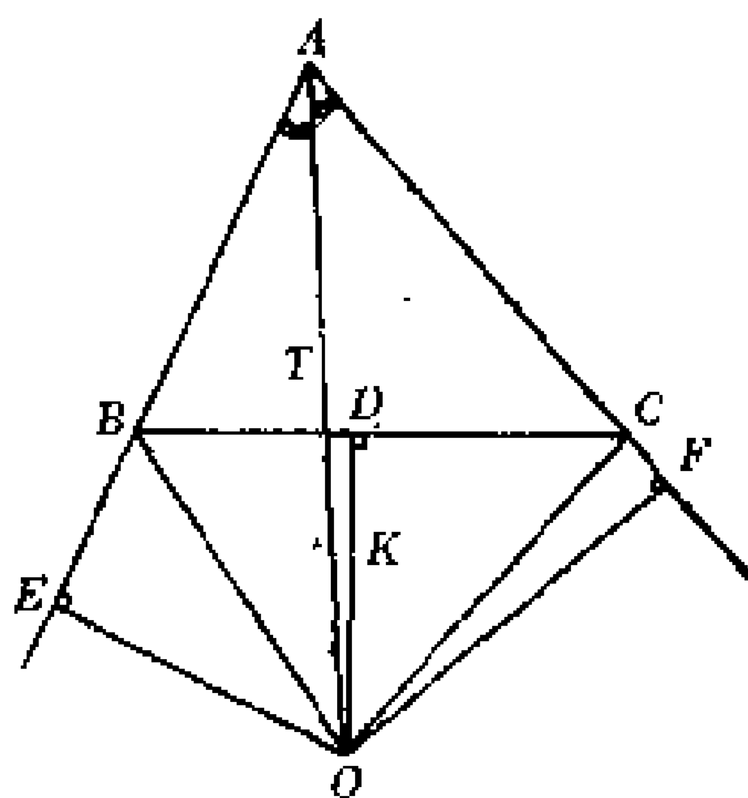


图 19

由上面各种可能情况都得出$AB = AC$，所以说“凡三角形皆是等腰三角形”得到证明。

上述证明过程中的全部论点，都是无可指责的，然而结论却是非常错误的。到底在什么地方出了错误呢？原因是没有按顺序公理去考虑问题，图形画错了。正确的图形应该是：第一，点O不能在三角形ABC的内部；第二，点E、F既不能同时在点A和B、点A和C之外，也不能在点A和B、点A和C之内，即应该是一个在其内，一个在其外。正确的作图应该是：交点O在△ABC的外接圆$\widehat{BC}$弧的中点上。

由此可见，如果一切论证仅依赖于直观图形就减弱了立论的逻辑性与正确性。欧几里得在自己的证明中，有时不依据公理和前面的定理而依靠直觉，这样他的某些定理并没有完全地被证明。

图 20

对于这个问题，如果要严格地讨论，则要用顺序公理来论证。

在几何原本中，除了缺乏连续公理、合同公理、顺序公理外，对于一些基本元素(如点、直线、平面等)都企图给予定义，但这是不可能的，现在我们知道象欧几里得那样给予的定义都是多余的，因为在以后根本没有用到它们。

3

从欧几里得

第五公设试证的失败到非欧几何的萌芽

在欧几里得《几何原本》中的第五公设是这样的："若两直线和第三直线相交，且在同一侧所构成的两个同侧内角之和小于二直角，则把这两直线向这一侧适当地延长之后一定相交。"这个公设的叙述是如此的冗长复杂，并不象其他公理那样简单和明显；加之它在"原本"中的应用很迟，仅在第29命题中唯一地应用了一次，因此历代的数学家认为不一定要作为公理（公设）出现，而可以从排在它前面的公理、定理中推证出来。

在欧几里得以后的两千年期间，许多数学家都去试证过它。例如：波西遆尼（公元前一世纪），勃陶列密（公元前三世纪），蒲罗克鲁（410—475），那面尔·叶金(1201—1274)，D.窝雷斯(1616—1703)，兰佩尔(1728—1777)，勒让得耳(1752—1833)，伏·波里埃(1775—1856)，D.萨开里(1667—1733)，高斯(1777—1855)，约·波里埃(1802—1860)和尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基等，都曾作过很大的努力，有的甚至用了终生的力量，但没有一个获得成功。伏·波里埃就是其中终生从事这项工作的一个，当他知道他的儿子约·波里埃正在进行关于平行

线论的研究时，他写信给他的儿子说："希望你，……不要做克服平行线论的尝试，你花了所有时间在上面，但你一辈子也证不出这命题，……我熟知一切方法直到尽头，我还没有遇到过一个思想未曾被我所探讨过的，我经过了这个夜的无希望的黑暗，并且我在这里面埋没了人生的一切亮光，一切快乐……希望你放弃这个问题。对它的害怕应当更多于感情上的迷恋……这个夜任何时候不会在地面上明朗化……这是我心里最大的永远的创伤……。"可见这位老数学家失败后的心情是多么苦恼和失望！不过，约·波里埃没有接受他父亲的劝告，他继续工作，从而开拓了新的数学领域，与罗巴切夫斯基和高斯等人一起成为非欧几何创始人之一。

现在再举两个在历史上有名的例子，来说明历代数学家企图证明第五公设的情况，以资借鉴。这类证明都依据了一个与第五公设等价的命题，因而这些证明都是失败的。

首先看希腊古代的数学家蒲罗克鲁的证明。

设直线l_1和l_2被第三直线l_3所截，在l_3的一侧构成同侧内角α和β，且$\alpha+\beta<2d$。

求证　l_1和l_2两条直线相交。

证　过l_1与l_3的交点B作直线l，使l和l_3两条直线在l的上方作成角α'，并且有$\alpha'=\alpha$。很明显l与l_2不相交（证见定理1、推论2，它可不依赖于第五

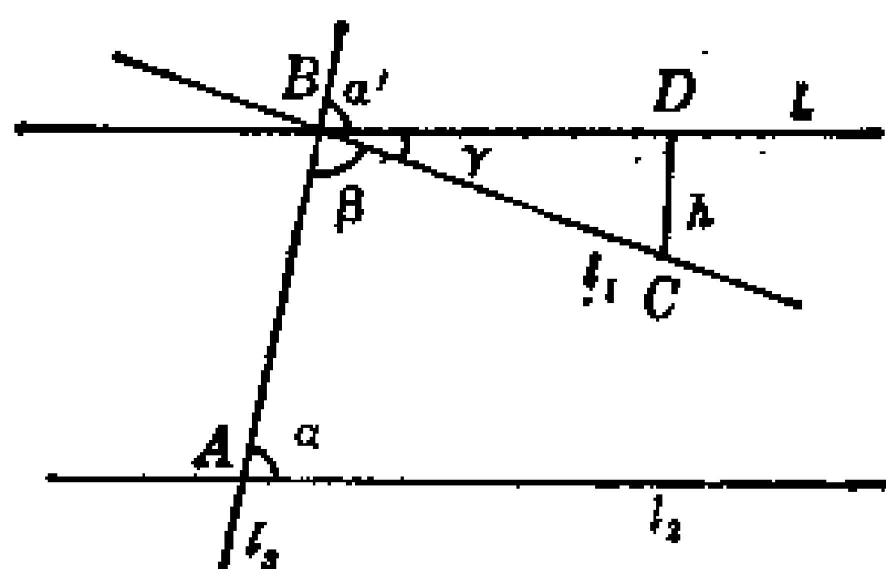


图　21

公设).

$\because$　$\alpha' + \beta = \alpha + \beta < 2d$

$\therefore$　直线l与l_1不相同.

又$\because$　$\beta < 2d - \alpha$

$\therefore$　l_1落在l下面，l与l_3所成的角的内部，并且和l作成角r，$r = 2d - (\alpha + \beta)$ 是大于零的.

现在我们在l_1上取动点C，并使C沿着l_1与B点无限地远离，如果令C到l的距离$h = CD$ 则当C点由点B出发而无限远离的时候，h将由零开始无限地递增，所以h一定会在一点C的位置上等于l_2与l两条直线间的距离. 这个时候，因为C到l的距离是l_2和l的距离，所以C一定落在l_2上，也就是说C是l_2与l_1的交点了，于是就证明了l_1与l_2必定相交.

这个第五公设的证明在什么地方发生了漏洞呢?

蒲罗克鲁在这个证明中作了两个假设:

1° 当C沿着l_1无限远离点B时，距离$h = CD$将无限增大. 这与第五公设无关.

2° 如果l与l_2不相交，则l与l_2的距离一定有上界，并且对于一条直线上所有的点到另一条直线的距离都相等，这恰好是与第五公设等价的命题.

蒲罗克鲁的这个证明，不是真正的证明，仅仅是把蒲罗克鲁的假设与第五公设对调了一个位置而已，因此他的工作失败了.

再让我们看英国数学家窝雷斯的证明:

设　l_1与l_2是两条直线，第三条直线l_3截这两条直线，使在

l_3的同侧内角为α及β，而$\alpha+\beta<2d$

求证 l_1与l_2必相交.

证 过l_1及l_3的交点A作直线l，使l与l_3交成角β.因为$\alpha+\beta<2d$ 所以l必落在角α的邻补角之内，现在把直线沿着$\overrightarrow{AB}$方向平行移动，并保持角β不变，则l必能达到一个位置l'，l'与l_1交于点C'，与l_3交于点B'.

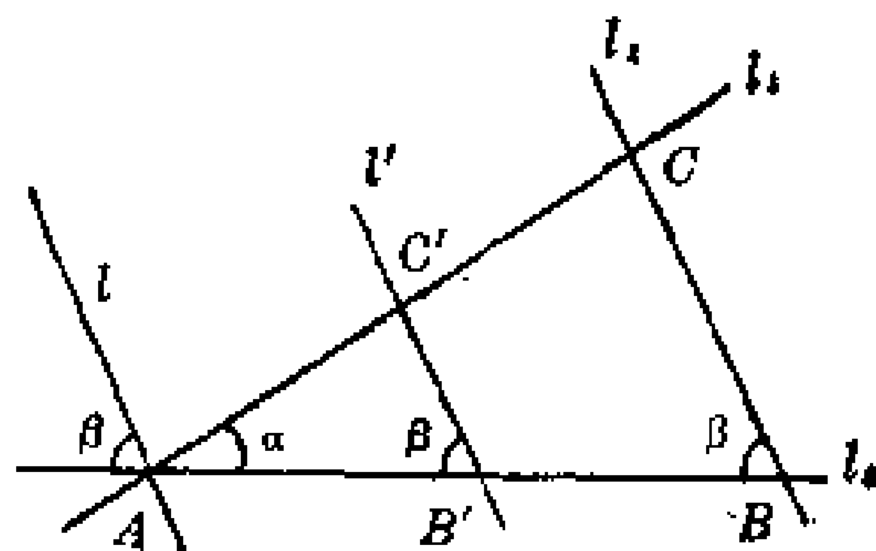


图 22

再以线段AB为一边作与$\triangle A'B'C'$相似的三角形ABC，因为l_2与边AB所成的角是β，所以这个相似$\triangle ABC$的一条边BC在l_2上.同理，另一条边AC在l_1上，故$\triangle ABC$的第三个顶点C，一定在l_1与l_2相交的地方.因为和$\triangle AB'C'$相似的三角形一定存在，所以两条直线l_1及l_2一定有交点，这就证明了第五公设.

窝雷斯这个证明错在什么地方呢？

错误是他假设了与$\triangle AB'C'$相似的三角形一定存在，事实上这正是与第五公设等价的命题. 因此窝雷斯并没有真正证明第五公设，他的工作同蒲罗克鲁一样地失败了.

此外，历史上还有许多数学家也同样犯了"循环论证"的错误，一切证明都失败了. 本书在前一节曾提出过萨开里的三种假设；勒让得耳的错误证法；就是十九世纪的数学权威高斯，15岁时就开始考虑这个问题，一直到39岁还没有放弃. 他曾写

信给马赫尔说："…应直率的承认，二千年来，我们并没有比欧几里得走得远一些"。后来他又说："我日益相信，我们几何中所需要证明的部分，却是不能证明的。"十八世纪末期，德国一位数学家曾经分析过30个第五公设的证明，并且都找出了每个证明中的错误。可以想象，这两千多年来，数学家们走过的道路是多么曲折啊！

有人指出："过直线外一点只可作一条直线与已知直线不相交"是可行的。在我们的实践中的确只能作一条这样的直线，如果作两条这样的直线，总可认为其中有一条与已知直线相交。所以有人说："过直线外一点可作两条直线与已知直线不相交"是行不通的。

在十八世纪末到十九世纪初，康德（Immonuel Kant 1724—1804德国人）的唯心主义哲学影响最深，康德主义者认为："公理"也就是这样一种原理：当人们的智慧一经注意到它的时候，它便浅显明白地排斥任何可能的怀疑。在这种唯心主义思想的束缚下，人们就不敢否认欧几里得第五公设而代换在形式上更不浅显明白的公设。所以，当罗巴切夫斯基，约·波里埃（Johonn Bolyai1802—1860匈牙利人）等人提出与欧几里得第五公设相反的另一个公设："在平面内过已知直线外的一个已知点至少可以作两条直线与已知直线不相交"的时候，曾遭受到许多讥诮，它不能被人们所接受。当时有些数学家说他是"怪人"、"是对有学问的数学家的讽刺"，即使象有声望的学者奥斯特罗格莰基也在罗巴切夫斯基的手稿上批着"不值得科学院注意"等根本否定的意见，甚至当时的数学权威高斯也没有公开肯定

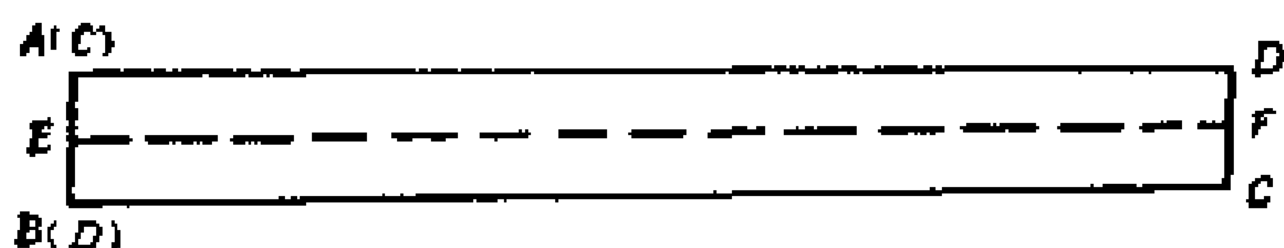
罗巴切夫斯基的著作，只是在朋友通信中说罗巴切夫斯基是："目光敏锐的数学家"。今天，我们初次遇到这个命题时感到"吃惊"，甚至感到"怪诞"，也就没有什么奇怪的了。

但是，我们不要忘记在几何里指的直线是无限伸长的！在无限领域里所引出的无限长的直线是否相交，我们是无法去检查的。不能因为在一张画图纸那样小得可怜的有限区域里所引的某条"平行线"与已知直线不相交，就判断说在无限领域内也一定不相交。不可以由此就肯定在无限区域里过已知直线外一点所引的那两条直线就一定会相交。将有限区域里所检验的（不是通过理论的）局部片断结果，当作无限区域里的普遍现象，显然是行不通的。这也就是同欧氏几何的某些命题出现矛盾的原因所在。

再说，单凭直觉与片面的经验作出的判断，是不能当作理性知识看待的。除了在日常生活和生产中能举出许多事例外，现在在几何里再举一个有趣的例子，建议大家在说明这个事例时，亲手制作下面的模型，就会有更深刻的体会。

把一条矩形长条纸带$ABCD$（如图）放在一个平面上，使AB在平面内，但把对边CD翻转$180°$，然后与AB粘牢，使C与A重合，D与B重合，就成了一条扭曲的环带。

现在把这个扭曲的环带拿起来，用剪刀沿着中间线EF（虚线）把它剪开，那么你大概会认为"这一下当然剪开成为两个环了。"可是当你亲手用剪刀细心地剪一圈后，你会大吃一惊，它并不象你"判断"的那样，相反，它仍然是一个环，这个环的长度增加了一倍，宽度减少了一半。这说明你的主观判断是



(1)



(2)

图23

错误的。第二次，你又同第一次一样，沿着中间线再剪一圈，你看会怎样呢？这一次，你会接受上次的经验，判断"剪开后仍然是一个环，它的长度又增加了一倍，宽度又减少了一半，"结果你这个经验的判断，果然是对的。第三次你又照前面的方法，拿着剪刀沿中间线剪去。你接受第一次错误判断的教训，凭着第二次正确判断的经验，说："剪开后仍旧是一个环，这个环的长度又增加一倍，宽度又减少一半。"可是结果如何呢？剪完一圈后，你又会大吃一惊，这次只有一半的长度被剪开了，而另一半的长度却根本没有被剪到。这说明你虽然接受了第一次判断失败的教训，吸取第二次判断成功的经验，可是这个"经验"第三次却用不上了。(注：上面这个扭曲环带称为梅比乌斯(Mobius)环带。它还有一些有趣的事实。这些事实是不易被简单的直觉所理解的。)

这个例子说明我们如果单凭感官的直觉与片面的经验所作出的判断，不一定靠得住，有时会出现错误。只有作出逻辑推理判断，才是可靠的。在几何里某些命题尽管看起来是显然的，

但是如果不作出逻辑推理判断，仍不能被人们所承认。因此，逻辑地建立几何学，就成为一项艰巨的任务了。

大家都知道，欧几里得的平行公理——在平面内过已知直线外的一个已知点，最多只能作一条直线与已知直线平行——是一个不加证明（事实上也不可能证明）而作为一种“约定”的命题。我们已经不能从逻辑上证明它，也不能从逻辑上推翻它。因此我们没有理由去反对它。现在罗巴切夫斯基的“约定”——在平面内，过已知直线外的一个已知点，至少可以作两条直线都与已知直线不相交——如果你也无法从逻辑上推翻它，又怎么可以武断地反对它呢？所谓在逻辑上去推翻它，就是先承认它，然后在承认它的前提下去找矛盾。如果找到了矛盾，就意味着我们原先承认它是不应该的，这样就把这个“约定”推翻了。如果在逻辑上找不到矛盾，就不能武断地否定它。这种想方设法去找矛盾的思想，就导致了“非欧几何”的萌芽。我们还会系统地阐述这种发展成“非欧几何”的过程（我们重点谈罗巴切夫斯基几何的主要内容），这对于提高我们的逻辑思维能力和空间想象能力，都将是大有益处的。

4
公理系统

前面说过，欧基米得《几何原本》存在着缺点。这主要是它在某些地方，用直观代替了逻辑推理，这对于逻辑地建立几何学来说，是不能容许的。历代数学家早曾注意到这个问题。一直到十九世纪末期，希尔伯特(D.Hilbert)在1899年出版了他的名著《几何基础》，才解决了这个问题。为此，他在1903年获得以罗巴切夫斯基的名字命名的国际奖金。

希尔伯特在他的著作中，提出了欧几里得几何完备的几何公理系统，从这个公理系统里可以用逻辑推理得到这个几何的所有内容，并且确立了在这个系统中每一组公理对于其他公理的独立性。

关于公理系统必须满足下面三个基本条件：

1. **公理系统的相容性**（无矛盾性就是说在给定的公理系统内，不能有两个互相矛盾的命题）。

2. **公理系统中的各条公理的独立性**（是指一个公理系统里的每一个公理，都有它独立存在的必要性，也就是说，在系统内每一条公理不能用其余的公理，通过逻辑的方法加以证明）。（详见七，§1）

3. **公理系统的完备性**（是指给定的公理系统用各种模型

解释时，对于其中所有的定理，都有一对一的对应关系，则这个公理系统是完备的）.

也有这样一种说法：公理系统本身是完备的，不能把新的公理增加到这个系统中去，使之成为更细致的公理。也就是说这个公理系统已经是完全够用的了。

下面列举希尔伯特的公理系统：

首先给出三个集合：

第一个集合的对象称为“点”，用A、B、C……表示；

第二个集合的对象是“直线”，用a、b、c……表示；

第三个集合的对象是“平面”，用α、β、γ……表示.

点叫做直线几何的元素；点与直线叫做平面几何的元素；点、直线和平面叫做空间几何的元素。

我们的主要任务是研究基本对象间的一些关系，例如：

“…在…上面”，或者“…通过…”叫做结合关系；

“…介于…之间”叫做介于关系；

“…与…合同”叫做合同关系；

“…与…平行”叫做平行关系；

……

基本对象之间的关系不是任意的，它们必须满足下面列举的五组公理系统的要求。至于“对象”本身的具体形象是什么，或是“关系”的具体解释怎样，并不是重要的。就是说，满足一定公理系统的对象构成一定的几何学。

下面介绍希尔伯特的五组公理。

第Ⅰ组：结合公理。共有8条。

I_1　对于任意的两个点A、B，存在着直线a通过A点及B点。

I_2　对于任意两个不同的点A、B，至多存在着一条通过它们的直线a。

I_3　在每一条直线上至少有两个点，至少存在着三个点不在一条直线上。

I_4　对于任三个不在一条直线上的点A、B、C，存在通过每个点的平面α，任意一个平面上至少有一个点。

I_5　对于任意三个不在一条直线上的点A、B、C，至多有一个通过每个点的平面α。

I_6　如果直线a的两个点A、B，落在平面α上，则直线a的任何点都落在平面α上。

I_7　如果两个平面有一个公共点，则它们至少还有第二个公共点。

I_8　至少存在四个点不在一个平面上。

第Ⅱ组：顺序公理．共4条．

我们假定直线上的一个点，对于同一条直线上两个别的点有一种关系，这种关系称为“介于”关系．“介于”关系满足下面的公理：

II_1　如果点B介于A、C之间，则A、B、C是一条直线上的三个不同的点，而且点B也介于点C与点A之间．写成

$$A\dot{B}C$$

如果有　$A\dot{B}C$，

则有　$C\dot{B}A$



图 24

有时也称B为A、C中间的点。

Ⅱ$_2$　对于任意两个点A、C，在直线AC上至少存在着一个点B，使得C介于A、B之间。

这条公理我们理解为线段可以延长。

Ⅱ$_3$　同一条直线上的任意三个点中，至少有一个点介于其他两个点之间。

Ⅱ$_4$　（帕士公理）　设A、B、C是不在一直线上的三个点，a是A、B、C所决定的平面上的一条直线，并且不通过三点中的任何一个点。如果直线a通过线段AB的一个内点，则直线a一定要通过线段AC的内点或者线段BC的内点。

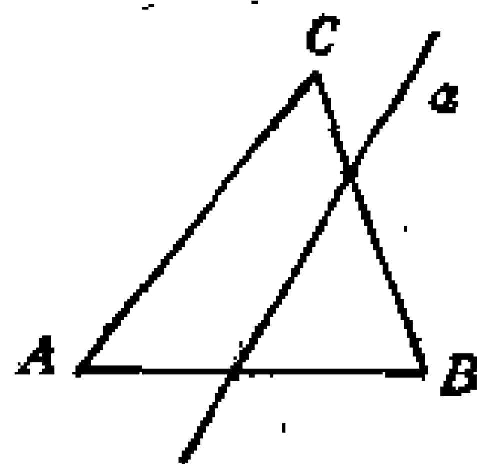


图　25

第Ⅲ组：合同定理。共有5条。

这组公理将解释"合同"的概念，从而得到"运动"的概念。

我们假设一条线段对另一条线段（或者对它自己）可以有一种关系，这种关系用"合同"或"相等"的字句表示。

合同关系符合下面的公理：

Ⅲ$_1$　如果A、B是直线a上的两个点，A'是同一条直线或者另一条直线a'上的点，则在直线a'上，点A'任意的一侧一定可以找到一个唯一的点B'，使得线段AB与线段$A'B'$合同，也可以说线段AB和线段$A'B'$相等。

合同的线段AB和$A'B'$，记为

$$AB = A'B'$$

这个公理的意义是指：可以把任意一条线段放在任意一条直线上，使得线段的端点和直线上的一个指定的点重合，而线段的另一个端点落在那个指定的点指定的一侧内。所以也简单地称这条公理为线段运动的唯一性公理。

III_2　如果线段$A'B'$及$A''B''$都与同一条线段AB合同，则$A'B'$与$A''B''$合同。

如果　$A'B' = AB$，$A''B'' = AB$

则　　$A'B' = A''B''$

III_3　设AB和BC是直线a上的两个线段，没有公共的内部点。再设$A'B'$和$B'C'$是同一条直线或者是另一条直线a'上的两条线段，也没有公共点。

如果　$AB = A'B'$

及　$BC = B'C'$

则　　$AC = A'C'$

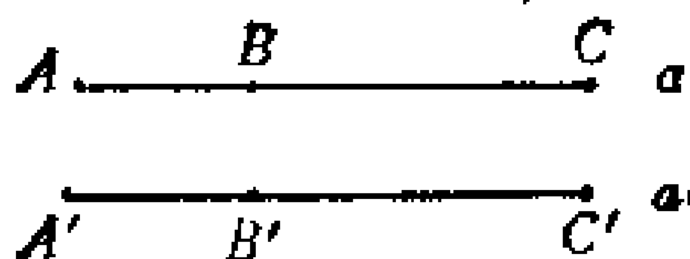


图. 26

这条公理表示线段的可加性。

III_4　如果在平面α上给定一个角$\angle(h,k)$，在同一个或者另一个平面α'上给了直线a'，并且在平面α'上指定了直线a'的确定的一侧，设h'是直线a'上从点o'出发的射线，那么在平面α'上存在着唯一的一条射线k'，使得$\angle(h, k)$合同于$\angle(h', k')$；而且$\angle(h', k')$的所有内部的点都在直线a'所指的那一侧。这也可以说$\angle(h,k)$和$\angle(h',k')$相等。

合同角$\angle(h,k)$和$\angle(h',k')$　记成：

$$\angle(h,k) = \angle(h',k')$$

对于每一个角，我们总认为它和它自己合同，就是有合同关系：

$$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$$

及 $\angle(h,k)\equiv\angle(k,h)$

这是角的运动的唯一性公理。

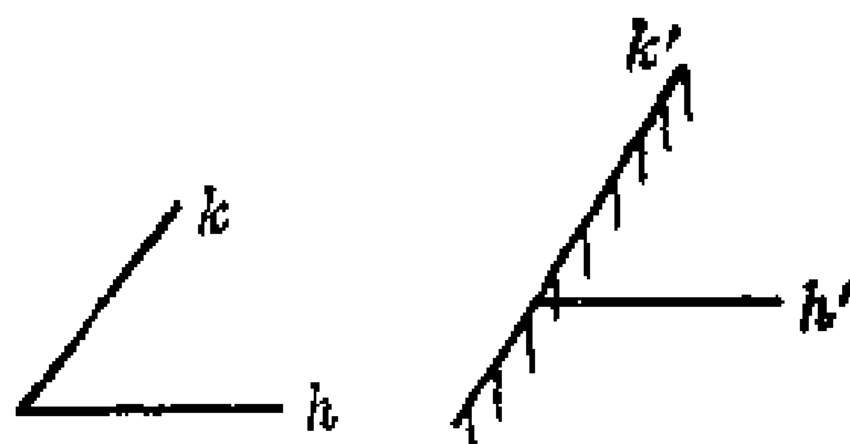


图 27

Ⅲ_5 两个三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$之间有下面的合同关系：

如果有 $AB\equiv A'B'$，$AC\equiv A'C'$，$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$

则总有 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ 和 $\angle ACB=\angle A'C'B'$

第Ⅳ组：连续公理。

Ⅳ_1 （阿基米德公理） 设AB和CD是任意的两条线段，那么在直线AB上一定存在着有限个点A_1，A_2，A_3，……，A_n，$n\geqslant1$，这些点排列的形式是：点A_1介于点A和A_2之间；点A_2介于点A_1、A_3之间；等等，段与段之间有合同关系：

$$AA_1\equiv A_1A_2\equiv\cdots\cdots\equiv A_{n-1}A_n\geqslant CD$$

并且使点B介于点A和A_n之间。

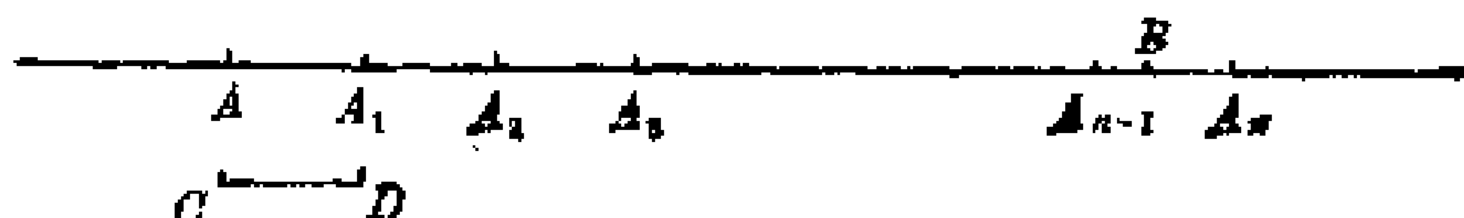


图 28

Ⅳ_2（康脱儿公理） 设在直线a上给了线段的无穷序列：A_1B_1，A_2B_2，…，A_nB_n，…；其中每一个后面的线段连端点在内，完全落在前面一个线段的内部；再有，设对于任意给定

的线段CD，无论多么短，总可以找到一个自然数n，使得A_nB_n小于CD，那么在直线a上存在着一个点x，落在所有线段A_1B_1，A_2B_2，$\cdots A_nB_n$，$\cdots$的内部。



图 29

这两个公理普通称为测量公理，是任意线段能够由测量得到长度的理论基础。

IV_1和IV_2两条公理可以用等价的戴德京特（R.Dedekind）命题来代替。

在直线上界于二点A，B之间的所有各点M，如能分成两类k_1，k_2，满足：

（1） 每一点M必属于这两类中的一类，而且点A属于第一类k_1，点B属于第二类k_2；

（2） 在第一类k_1里异于点A的每一点M_1，必介于A与M_2之间，这里M_2是K_2的任意点。

称K_1、K_2为一个划分。对于任一划分K_1、K_2，存在唯一的点C，使介于A，C之间的任何一点P必属于第一类K_1，而且介于C，B之间的任一点Q，必属于第二类K_2，这样对应于K_1、K_2的点C叫做戴得京特点。

满足：结合公理I_{1-8}，顺序公理II_{1-4}，合同公理III_{1-5}及连续公理IV_{1-2}的几何学，称为绝对几何学。

第V组：平行公理。

这里分别有两个截然相反的公理．就是欧几里得平行公理和罗巴切夫斯基平行公理．分述如下：

V：欧几里得平行公理

设有一条直线 a 及直线外一点 A，则在 a 和 A 所决定的平面上，通过 A 点最多只有一条直线 a' 与直线 a 不相交．

在欧几里得《几何原本》里的第五公设是这样叙述的："在一平面上如果两条直线都与第三条直线相交所构成的同侧内角的和小于二直角，则在构成这样的同侧内角的一侧把这两直线适当地延长后，一定相交。"

这个命题叙述较繁，一般都用和它等价的命题来代替，如前面的 V，称为欧几里得平行公理．

由绝对几何公理系统 $Ⅰ_{1-10}$，$Ⅱ_{1-4}$，$Ⅲ_{1-5}$，$Ⅳ_{1-2}$ 加上欧几里得平行公理 V 所组成的公理系统，称为欧几里得几何公理系统．由欧几里得公里系统逻辑地建立起来的几何学，称为欧几里得几何学，简称欧氏几何．

V' 罗巴切夫斯基平行公理

"设有一直线 a 和直线 a 外的一点 A，则在由直线 a 和点 A 所决定的平面内，过 A 点至少有两条直线，都与直线 a 不相交。"

由绝对几何公理系统 $Ⅰ_{1-10}$，$Ⅱ_{1-4}$，$Ⅲ_{1-5}$，$Ⅳ_{1-2}$ 加上罗巴切夫斯基平行公理 V' 所组成的公理系统，称为罗巴切夫斯基公理系统．由罗巴切夫斯基公理系统逻辑地建立起来的几何学，称为罗巴切夫斯基几何学，简称罗氏几何．

由此可知，欧氏几何与罗氏几何的共同部分是绝对几何．而主要的区别在于欧氏平行公理 V 和罗氏平行公理 V'．所以在

欧氏几何与罗氏几何中凡是不应用到平行公理的定理都有相同的结论，凡是应用到平行公理的定理就给出截然相反的结论。例如在欧氏几何中三角形全等的判定定理，在罗氏几何中都可以应用，因为它仅仅是属于绝对几何的内容。又如在绝对几何中只能证明三角形三内角的和小于或等于二直角，因为还没有利用平行公理。但是当引用欧氏平行公理V后，就得到三内角之和等于二直角。当引用罗氏平行公理V'后，就得到三内角之和小于二直角。前者属于欧氏几何的定理，后者属于罗氏几何的定理。

5

与欧氏平行公理等价的命题

前面我们曾用到“等价”这个词，现在严格地定义“等价命题”。

定义 如果在某一公理系统里，由命题 A 能推出命题B；反过来在这个公理系统里由命题B能推出命题A，那么就称命题A和命题B是等价的。

因此要证明平行公理与某一命题是等价的，必须证明两方面：在绝对几何公理里加上平行公理能够证明某一命题；反过来在绝对几何公理系统里，以这个命题为依据，又能证明平行公理，就说平行公理与某一命题是等价的命题。

在历史上，有不少的数学家用了很大的精力企图去证明平行公理，却都没有得到结果。原因在于他们不知不觉地应用了与平行公理等价的命题作为根据去推证平行公理。例如在第 3 章里，我们曾举了蒲罗克鲁和窝雷斯两人试证第五公设所犯逻辑错误的例子，这些努力，都说明了欧氏平行公理的不可证明，它是独立的。但试证平行公理的工作，也并不是徒劳的，这为后来建立非欧几何，提供了新的思维方法，开辟了新的道路。我们现在历史地看待问题，应该作出恰当的估价。特别是对于我们学习几何学的人来说，仔细地推敲与欧氏平行公理等价的

命题的各种证明，对于我们养成严格地用逻辑思维的方法去分析和证明命题是很有益的。

与平行公理等价的命题很多，这里只举几个例子作为说明．还有一些等价命题，可由读者自己去证明。

定理 5 命题“任意三角形的内角和等于两直角”与平行公理等价。

由平行公理能得出三角形内角和等于二直角，这是我们早已证明过的问题．现在只要证明：设a是一条已知的直线，A是直线a外的任一点，证明通过点A，只有一条与a不相交的直线．

先证存在性．

假定AB是从点A到直线a的垂线，B是垂足．过A作AB的垂线c，直线c、a同是AB的垂线，因此，c和a是不会相交的．因为，如果它们相交，将会与三角形的外角大于不相邻的内角矛盾，而外角定理是不依赖平行公理的。

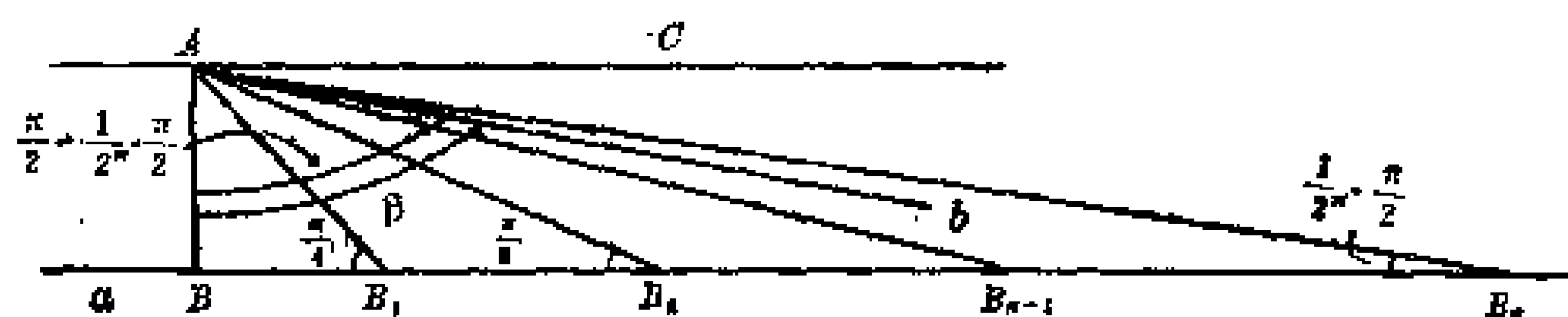


图 30

再证唯一性。

假设b是任意一条通过A并且和c不同的直线，考虑直线AB的这一侧．在这一部分中，直线b和AB构成的角β是锐角，现在证明直线b和直线a在这一侧相交。

为此目的，由B起沿着a的一侧，作出点B_1，使 $BB_1=$

AB, $B_1B_2=AB_1$, …, $B_{n-1}B_n=AB_{n-1}$.

因为我们假设三角形内角和等于 π，所以$\triangle ABB_1$在顶点A和顶点B_1的角都等于$\frac{\pi}{4}$，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$。

同理$\triangle AB_1B_2$在顶点A和顶点B_2的角都等于$\frac{\pi}{8}$，即$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2^2}$。

这样下去，一般地$\triangle AB_{n-1}B_n$在顶点A和顶点B_n的角都等于$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2^n}$，亦即$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}$。

由此可得 $\angle BAB_n=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}$

因为β是锐角，所以一定存在着正数 $\varepsilon>o$，使得$\beta=\frac{\pi}{2}-\varepsilon$，现在取这样大的$n$，使得$\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{2}<\varepsilon$，于是存在着$B_n$，使得 $\beta<\angle BAB_n$。

这时的直线b，夹在AB和AB_n之间，因此b和直线a必有交点，所以说如果三角形内角和等于π（$2d$），则过直线a外的任一点A，只有一条直线C与直线a不相交，从而定理5得证。

定理6 命题“在平面上存在着一个三角形的内角和等于二直角”与平行公理等价。

证 由前面已经证明过的定理3（萨开里——勒让得耳第二定理），可知“平面内存在着一个三角形内角和等于二直角，与任何三角形内角和都等于二直角等价”，又由定理5，定理6得到证明。

定理 7 命题"如果在平面上存在简单四边形，其内角和等于$4d$"与第五公设等价。

我们作一条对角线把四边形分成两个三角形，设它们的内角和为σ_1，σ_2，有

$$\sigma_1+\sigma_2=4d$$

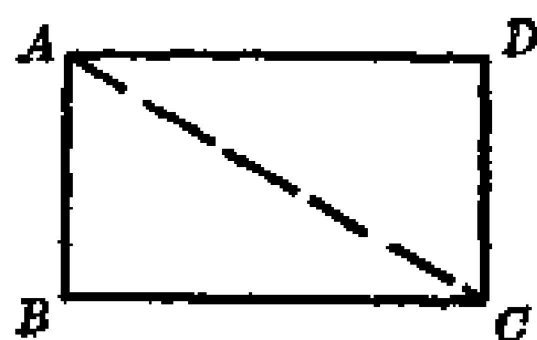


图 31

由定理1 $\sigma_1\leqslant 2d$，$\sigma_2\leqslant 2d$

因此有 $\sigma_1=\sigma_2=2d$

根据定理6，它与第五公设等价。

定理 8 命题"在平面上至少存在三点，使各点到定直线有等距离，而且在同一直线上"是与第五公设等价的。

证 设三点A'，B'，C'到直线l有同一距离h（$h=A'A=B'B=C'C$），且A'，B'，C'在一直线l'上。很明显，四边形$AA'B'B$和$BB'C'C$各有两侧边相等，底角为直角，按定义是萨开里四边形。

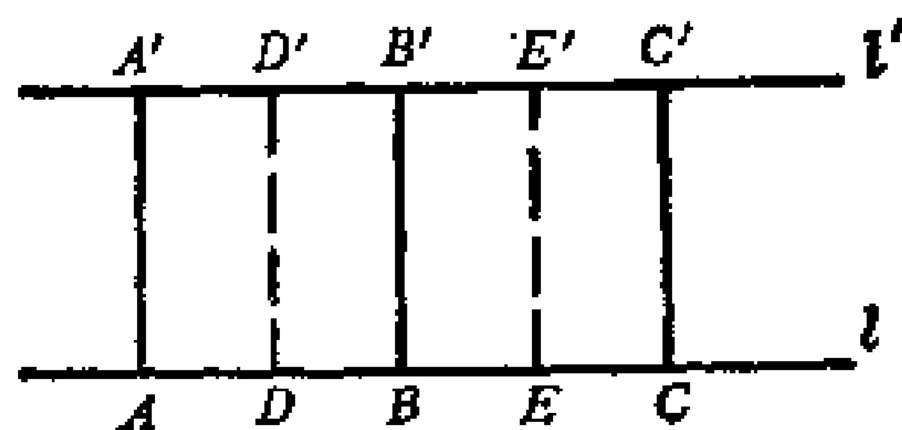


图 32

设$D'D$、$E'E$是它们的中线，由定理2，DD'、EE'垂直于它们的底边，因而DD'和EE'垂直于l和l'，所以四边形$D'DEE'$的内角和等于$4d$，由定理7知道，它是与第五公设等价的。

反过来，如果第五公设成立的话，对于$AA'=B'B=C'C$，两个四边形$ABB'A'$和$BB'C'C$，早已证明过是矩形，所以A'，B'，C'在同一直线上。从而定理8得到了证明。

现在回过头去，看第3章中蒲罗克鲁的错误证明，就知道他的错误所在了。

定理9 命题"通过一角内任一点可作与此角两边相交的截线"与平行公理等价。

证 如果欧氏平行公理成立，自然地欧儿里得第五公设也成立。假设D是$\angle CAB$内部任一点，我们只需通过D作角α，使$\angle CAB+\alpha<\pi$，这总是可行的。根据欧氏第五公设，这条直线一定和AC边相交。事实上我们前面说过，现在所用关于平行公理的叙述，叙是欧儿里得第五公设的另一种叙述形式。

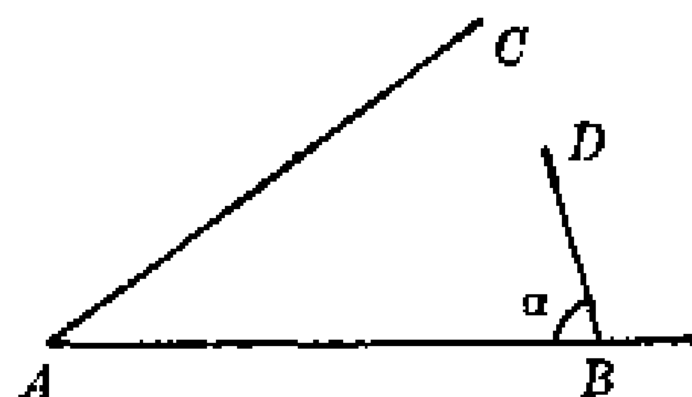


图 33

现在让我们根据"通过角内任一点，永远可以作与角的两边相交的直线"，来证明平行公理成立。

这只要证明，在这个假定条件下，三角形内角等于二直角就可以了。而由前面的定理1："三角形内角和小于或等于二直角"（萨开里一勒让得耳第一定理），又只要证明"三角形内角和不能小于二直角"即可。

由于现在假设了"过角内任一点可作一条直线与角的两边都相交"，再重新看第1章中关于勒让得耳定理"三角形内角和不能小于二直角"的错误证明，现在就完全是正确的了，从而证明了"任一三角形内角和等于两直角"，由定理6，平行公叙成立。这样就证明了定理9。

从这里可以更清楚地知道勒让得耳定理证明的错误所在

了．当时一些批评家并没有发现这个错误，还是后来勒让得耳自己发现了自己的错误．象这样的错误，稍有疏忽，在今天也会出现．例如1979年，高等学校招生试题中有一道题："证明勾股定理"。同学们（考生）应用余弦定理，解析几何中两点间距离公式和 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 等定理作为依据来证明勾股定理，他们忽略了上面这些定理都是以勾股定理为依据才能推导出来的．这是在兜圈子，犯了"循环论证"的错误，是逻辑思维上的错误．

定理10 命题"存在两个相似而不全等的三角形"与平行公理等价．

Ⅰ *正定理* 若平行公理成立，则存在不全等但相似的两个三角形．

众所周知，在初等几何里，根据平行公理，象这样相似而不全等的三角形，不仅存在，而且是无穷多对．

Ⅱ *逆定理* （瓦里斯定理） 如果存在两个不全等但对应角相等的三角形，则通过已给直线外一点不可能作两条直线平行于已给直线．

证 假令$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$不全等，但对应角相等，则边AC不能等于$A'C'$，否则，如果 $AC=A'C'$，则两三角形有一边及两角相等，必然全等，这与已知矛盾，所以 $AC\neq A'C'$．

现在若 $AC>A'C'$，可在AC上取一点C''，使 $CC''=C'A'$．过C'作直线$C''D$，使 $\angle CC''D=\angle C'A'B'$，因而有 $\angle CC''D=\angle A=\alpha$．直线$C''D$必与边$BC$相交，交点在$B$和$C$之间．事实上，$C''D$不能与直线$AB$相交，因为此二直线和

截线AC''作成相等的同位角，因此也作成相等的内错角，这样的两条直线，我们知道是不相交的。（证见定理1推论2）

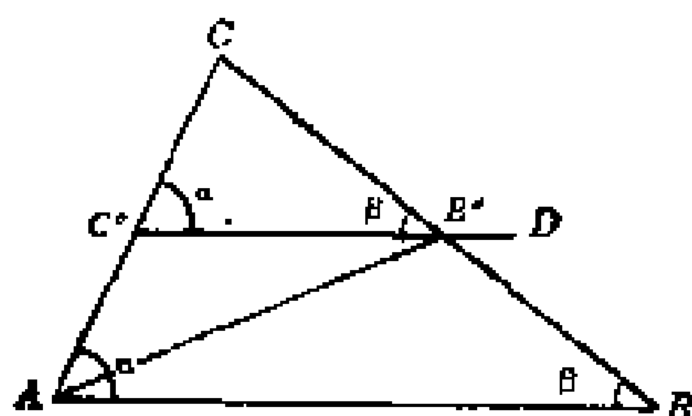


图 34

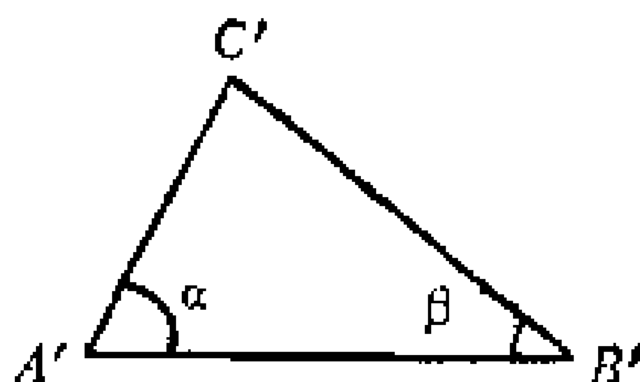


图 35

于是，不通过三角形的顶点，但和边AC相交于点C''，而不与AB相交的一条直线，按照帕士公理，必与边BC相交于一点B''，而B''在B、C之间。

所得 $\triangle CC''B''$与$\triangle C'A'B'$ 中有 $CC''=C'A'$，且$\angle C=\angle C'$， $\angle CC''B''=\angle C'A'B'$，

故 这两个三角形全等。

这时四边形$ABB''C''$ 四个内角之和等于

$\angle A+\angle AC''B''+\angle C''B''B+\angle B=\alpha+(\pi-\alpha)+(\pi-\beta)+\beta=2\pi$

四边形$ABB''C''$的对角线AB''将此四边形分为两个三角形ABB''和$AC''B''$。

按照萨开里—勒让得耳第一定理

$\triangle ABB''$的内角和 $\sigma_{\triangle ABB''}\leqslant\pi$

$\triangle AC''B''$ 的内角和 $\sigma_{\triangle AC''B''}\leqslant\pi$

又已证得 $\sigma_{\triangle ABB''}+\sigma_{\triangle AC''B''}=2\pi$

所以只有　$\sigma\triangle ABB'' = \pi$　$\sigma\triangle AC''B'' = \pi$

再由定理3和定理5，就证明了定理10。

这个定理应该引起我们极大的注意：如果不采用平行公理就不存在相似形。大家回忆一下，我们在中学里所学的几何学，相似形占了大半的篇幅，由此可见平行公理在几何学中的重要地位了。假如不采用平行公理的话，这些内容也就都不存在了。

定理11　（忽必烈命题）　命题"在平面上通过点C只可引一直线c，使与它直线不相交"，是与欧几里得第五公设等价的。

先证　如果欧氏第五公设"在平面上两条直线与第三直线相交构成同侧内角之和小于二直角，则这两直线适当延长后，必在同侧内角之和小于二直角的一侧相交"成立。那么"在平面上过点C只可作一直线l，使与定直线AB不相交"。

过C作直线CD，同位角　$\alpha' = \alpha$　所以，CD与AB不相交，这是因为同位角相等。那么这二直线不相交，是在绝对几何早已知道的事实。（证见定理1，推论2）

很明显，其他所有直线CD'和AB与AC在其一侧或他侧构成内部同侧角α和β，使其和　$\alpha + \beta < 2d$。根据公设5，AB和CD'相交，因此凡不合于CD的所有直线CD'与AB相交，所以通过C点只有一条直线（CD）与AB不相交。

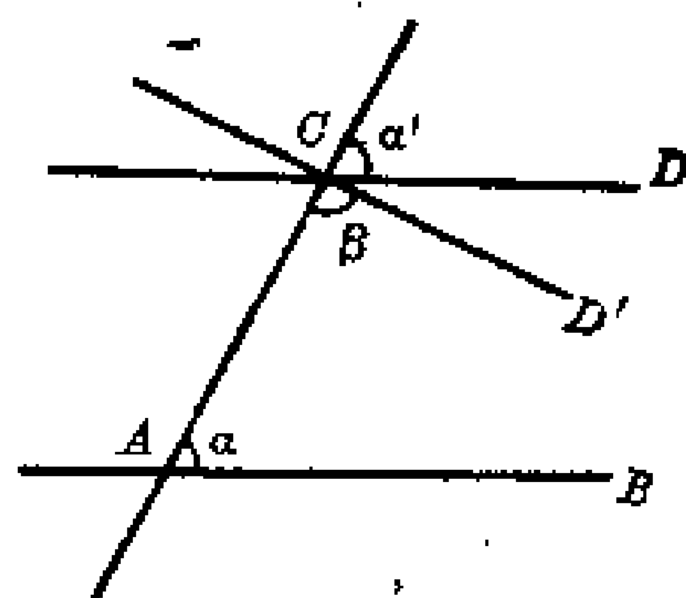


图　36

再证　"如果过直线AB外一点C，只能引一条直线CD和AB

不相交”，则欧几里得第五公设成立。

设AB和CD'是任意二直线，它们与AC所成同侧内角 $\alpha+\beta<2d$ 通过C作直线CD 使$\alpha'=\alpha$ 因 $\alpha'+\beta=\alpha+\beta<2d$ 所以CD不合于CD'。又因为同位角 $\alpha=\alpha'$ AB与CD不相交，由于过C只有一直线与AB不相交（根据假定），所以CD'与AB相交。这样一来，如果 $\alpha+\beta<2d$ 那么二直线AB与CD必相交，这就是我们所要证明的。

由等价定义可知 “在平面上通过已知直线外一点O只可引一条直线与已知直线不相交”是与欧几里得第5公设等价的。

前面我们已采用忽必烈命题作为与欧几里得第5公设等价的平行公理V。

定理12 （勒让得耳命题） 命题“一定直线的垂线和斜线常常相交”是与平行公理等价的。

设AB是AC的垂线，CD是斜线，若β是锐角，那么 $\alpha+\beta$ $(=d+\beta)<2d$。按欧几里得第五公设，CD和AB相交。若 $\beta>d$ 那么在AC的垂线的另外一侧，得到两个同侧内角之和小于$2d$，斜线CD仍与AB相交。这样一来，应用第五公设，就证明了勒让得耳命题。

为了证明逆命题，首先从勒让得耳命题引导忽必烈命题。设 C 是直线 AB 外的任何一点，从 C 引AB的垂线CA，凡通过C的直线CD的全体可分成三类：

(1) 在一定侧与CA构成锐角的直线；

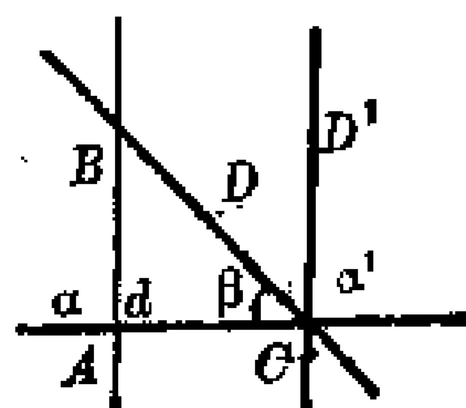


图 37

(2) 在同侧与CA构成钝角的直线；

(3) 与CA构成直角的直线。

第(1)、(2)的直线，由勒让得耳的命题，必与AB相交，仅剩下第(3)类直线CD'与AB不相交，这就是与AB不相交的唯一直线，这样一来应用勒让得耳命题，证明了忽必烈命题，也就是证明平行公理V。

定理13 (伏·波里埃命题) 命题"在平面上通过不在一直线上的三点可作一圆"是与平行公里等价的。

设PQ是AB的垂线，RS是斜线，在PR内任取一点B，且作B点关于PQ的对称点A，B点关于RS的对称点C。

因为RS是斜线，所以B的对称点C在AB外，按照伏·波里埃命题，通过A、B、C三点可作一圆，其圆心为O.面PQ和RS分别是圆上的弦的中垂线，所以PQ、RS必相交于圆心O。

我们从不在一直线上的三点可作一题得到了勒让得耳命题。而勒让得耳命题是与平行公理V等价的，所以伏·波里埃命题是与平行公理等价的。

定理14 命题"圆内接正六边形的一边等于该圆的半径"与平行公理等价。

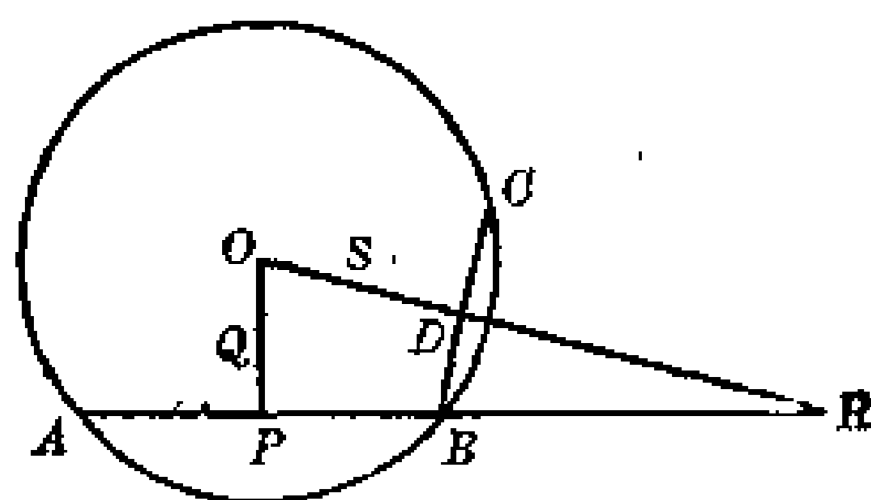


图 38

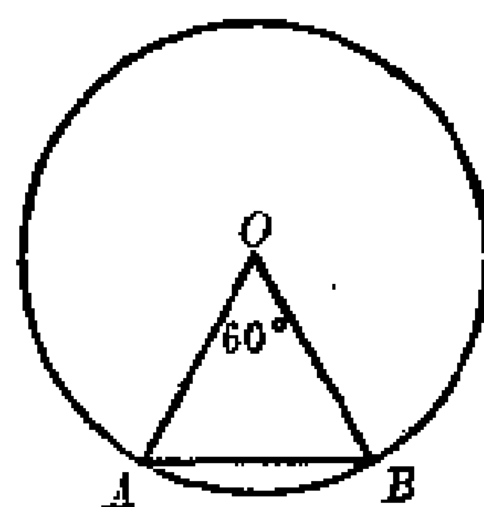


图 39

证 因为 AB 是正六边形的一边，它对的中心角 $\angle AOB = 60°$。

又因 $OA = OB$

所以 $\triangle OAB$的底角 $\angle A = \angle B$

又∵ $AB = AO$(题设)

∴ $\angle B = \angle O$

因此$\triangle OAB$内角和等于180°即$2d$。

我们已经证明了三角形三内角之和等于 $2d$ 与平行公理等价，从而定理14得到了证明。

定理15 命题"在直角三角形中两直角的平方和等于斜边的平方"与平行公理等价。

先证明下面两个引理：

引理 1 若萨氏四边形的上底等于下底，则欧氏平行公理成立。

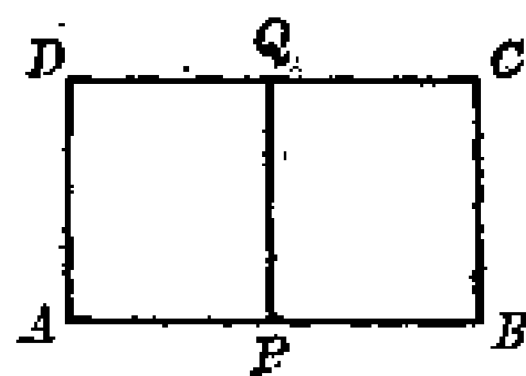


图 40

证 设萨氏四边形$ABCD$的两底$AB = DC$，P、Q是AB、DC的中点，则有$PB = QC$。由定理 2，PQ垂直于QC和PB，因而$PQCB$也是萨氏四边形。$\angle C$、$\angle B$是上底边上BC上的两个角，由定理2，$\angle B$等于$\angle C$，但已知$\angle B$是直角，所以$\angle C$也是直角。这样一来，四边形$PQCB$是矩形。由定理7，存在矩形是与平行公理等价的。

引理 2 若连接三角形二边中点的线段等于第三边的一半，则欧氏平行公理成立。

证　设D、E分别为$\triangle ABC$的边AC和BC的中点，自顶点A、B、C分别作DE的垂线AG、BH、CF，由直角三角形ADG与CDF的全等关系，得$AG=CF$。

又由直角三角形BHE和CEF的全等关系得

$$BH=CF$$

$$\therefore\quad AG=BH$$

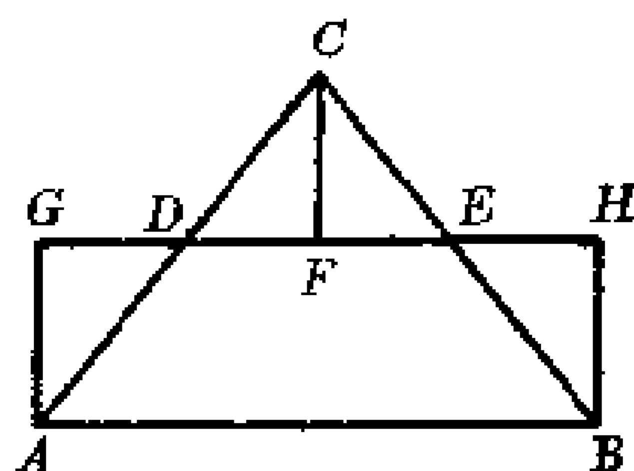


图　41

因而$HGAB$是萨氏四边形。又由上面两组全等三角形，得

$$DG=CF,\quad HE=EF$$

从而　$HG=2DE=AB$

这就是说萨氏四边形$HGAB$的上底AB和下底GH相等，由引理1，它与欧氏平行公理等价。

现在来证明：若直角三角形ABC中，弦的平方等于两直角边的平方和，则欧氏平行公理成立。

证　设D、E是直角边AB、AC的中点。

由已给条件：

$$\begin{aligned}DE^2&=AD^2+AE^2\\&=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2\\&=\frac{AB^2}{4}+\frac{AC^2}{4}\\&=\frac{AB^2+AC^2}{4}=\frac{BC^2}{4}\end{aligned}$$

故　$DE=\dfrac{BC}{2}$

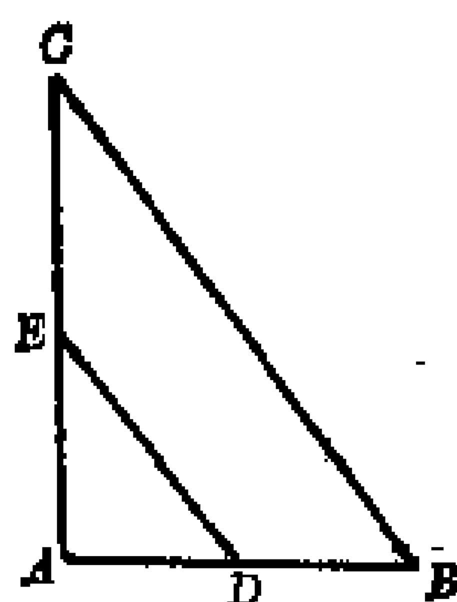


图　42

这样就得到三角形两边中点的连线段等于第三边的一半，由引理 2 它与欧氏平行公理等价，从而定理15得到了证明。

关于与欧氏平行公理等价的命题，历代数学家都有证明，这里就不再叙述了。

6
从三种模型上看三角形的内角和

我们熟知，在中学平面几何里，两个点间联线的最短者是直线，我们把这个概念扩充到任意的曲面上，使它有广泛的意义，即“直线（段）是在给定的曲面或空间内两点间取最短距离的联线”，即所谓“短程线”，即在大地测量时的“测地线”。

下面采用三种模型：

（1）一块平滑的玻璃板——代表中学平面几何里所讲的平面；

（2）一个篮球——代表球面；

（3）一块马鞍形的瓦片——代表双曲面。

在每个模型上各画一个三角形ABC，必须注意它们的三条边AB，BC，CA都是各个曲面内的短程线（即各个曲面内的直线），如图43。

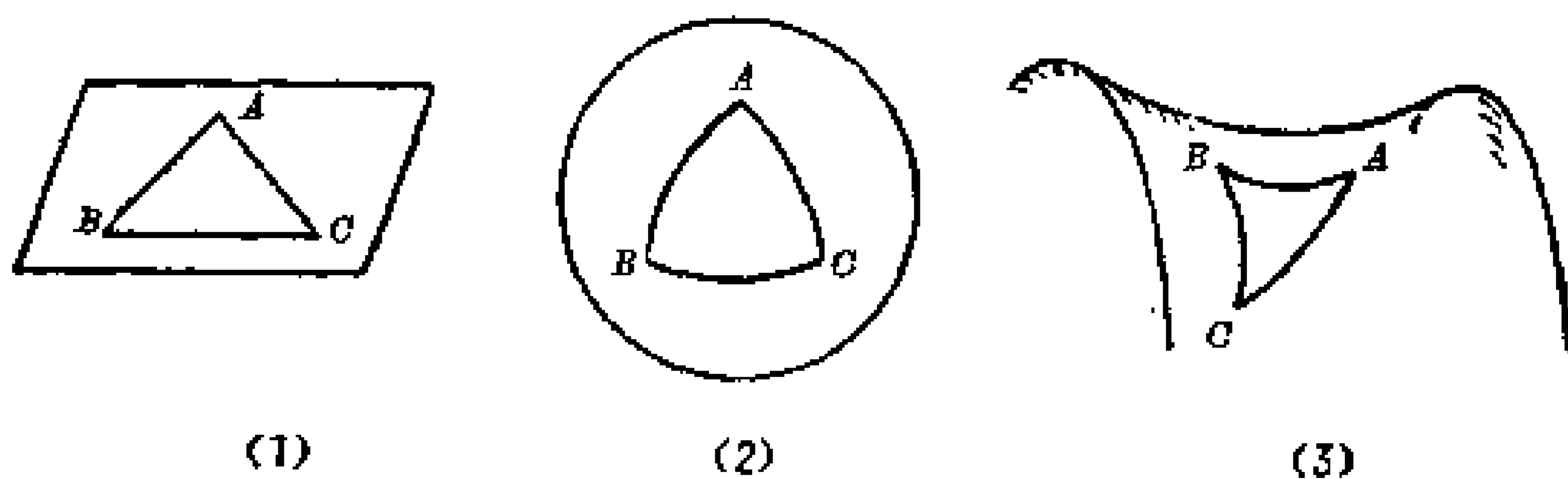


图 43

然后你实际去测量它们的内角和（按切线方向去量），就会发现：

在模型(1)里：$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

在模型(2)里：$\angle A+\angle B+\angle C>180°$ 且不是一个常数。

在模型(3)里：$\angle A+\angle B+\angle C<180°$ 且不是一个常数。

这里就大有文章可做了，然而这还是可以直接观察到的模型，是可以进行测量的，还有更广泛的情况。例如以太阳、北极星、天狼星的中心为三角形的三个顶点，这样构成的三角形的内角和，你就无法去实际量它。它到底是什么样的形状？也就很难直接观察出来，就是用光学仪器去测量也是靠不住的。通常说光线是直线进行的，可是根据爱因斯坦相对性原理推算：“物理空间是在巨大质量的附近弯曲的”，当光线通过很大的引力场时，光线是弯曲的，因此用光学仪器探测的位置，是否是某个点在太空中的真正位置，都是有疑问的。

事实上，在我们生活的空间里，它的形状并不是象我们平日所感觉到的那样简单的形式。例如，我们平日总是把水平面代表真正的平面，其实水平面并不是真正的平面，而是球面的一个狭小部分。因为地球上的水都是附着在球面上的，太平洋是如此，大西洋是如此，洞庭湖也是如此，脸盆里的水也是如此。因此可以说在水平面上去画直线，实际上画的是曲线。它不可能象我们所学的平面几何里那样的所谓“笔直”的直线。

对于一维空间（线），二维空间（面），我们还是比较容易观察出来的，因为我们是站在它的外面三维空间去观察它的。如果是三维空间(立体)，四维空间(例如：时、空、四元空间)

的事物，象前面所述的，以太阳、北极星、天狼星的中心为顶点的三角形到底是什么形状？我们就不易直接观察出来了。因为我们是生活在三维、四维空间里面的。中国有句古话说："旁观者清，当局者迷"是有道理的。

通过上面三种模型的观察，初步地感性地知道我们所生活的空间形式，并不是象我们平日所说的那样简单的形式。例如我们坐火车从长沙到北京，火车是在球面上移动的，可是车上的人，并没有这样的感觉，好象在平面上移动一样。如果我们再把地球自转和公转考虑进去，更进一步把宇宙空间中太阳系与其他星系的相对运动考虑进去的话，我们移动的轨迹是非常复杂的曲线。然而我们却没有感觉到，甚至以为我们是在欧氏平面几何里所说的"平滑的"的平面上移动。

几何学是现实空间的反映，反过来通过几何学的研究，更能深入地了解现实空间形式的各种性质。

可以肯定地说，对于无边无际的宇宙空间来说，它决不是我们在初等几何里所学的那种简单的形式，我们之所以应用欧氏几何，一般说来是对于有限的区域来说的。

所以说，我们看到在第一种模型里，三角形三内角之和等于180°，是对欧几里得几何而言的，它是正确的，我们也完全相信。

对于第二种和第三种模型，三角形三内角之和都不等于180°，我们说它不是属于欧几里得几何的，人们称它们为"非欧几里得几何"，简称为"非欧几何"。更具体地说，在第二种模型里的几何图形，三角形三内角的和大于180°，是数学家黎曼

所研究的，称它为“黎氏几何”.第三模型里的几何图形：三角形三内角的和小于180°，是数学家罗巴切夫斯基所研究的，称它为“罗氏几何”.当然这里提出这样三种模型，是使大家在思想上有个准备，并没有谈到它的实质，因为它的内容比较艰深，我们在这里只能概略地谈一些“非欧几何”的简单内容，其中对“罗氏几何”谈得多一些，对“黎氏几何”谈得少一些。

还要坦率地告诉读者，要想用通络的方法来阐明“非欧几何”的概念和内容，不是容易的事情。加之，笔者这方面的知识也是十分有限的，很难做到深入浅出，满足读者的要求。仅仅是作为开头，把读者引入到更广泛的思维范畴中去，以激发读者对这方面知识的兴趣。

7
罗巴切夫斯基几何概要

§1　罗巴切夫斯基的设想与成就

前面说过，欧几里得第五公设(平行公理V)在《几何原本》中排列在最后，而且只用过一次，它的叙述又那样冗长，它是否可以从前面的公理系统（绝对几何公理系统）逻辑地推证出来，把它变成一个定理呢?两千年来数学家们的努力都失败了，他们犯了逻辑循环的错误，就是用了与第五公设等价的命题来证明第五公设。

既然两千年来数学家们努力都失败了，那么我们不禁要问：是人类的智慧有限呢，还是第五公设从绝对几何公理系统中永远不能得到证明呢？就是说，第五公设与绝对公理系统是各自独立的呢，还是相关的呢？怎样来回答这个历史上两千年来遗留下来的问题？罗巴切夫斯基通过精心地设计，阐明了第五公设是独立的，它不可能从绝对几何公理系统中逻辑地推证出来，他不仅作出了历史性的回答，而且建立了非欧几何。

现在我们来证明什么是公理的独立性。

如果公理系统：A_1，A_2，…，A_n里，任何一公理A_k不能从排在它前面的公理A_1，A_2，…，A_{k-1}推导出来的话，叫做顺序

独立性系统。

如果任何公理A_i，不能从其他任何公理$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$，$A_{i+1}$，$\cdots$，$A_n$得出来的话，叫做绝对独立性系统。

很明显，从绝对独立性系统亦可得顺序独立性系统，但反过来就不一定成立。

如何建立起已知公理系统的某一公理E和其他公理的全体Σ是绝对独立的呢？

如果公理E是可以从公理Σ推证出来的话，那么把和E相反的公理E^-归并到Σ而构成新公理系统的话，应当是有矛盾的。即公理系统$E+E^-$里应当存在两个互相矛盾的命题E^-和E。

但如我们不知道E是否来自Σ，而知道$\Sigma+E$和$\Sigma+E^-$都是相容（无矛盾）的话，那么我们就会知道E不是来自Σ的，即E与Σ无关，就是说E是独立的。不然的话，$\Sigma+E^-$必有矛盾，这是与但设条件相违背的。

所以为了建立起某公理E在相容的公理系统$\Sigma+E$中的独立性，只要阐明公理系统$\Sigma+E^-$是相容的就够了。

更明确地说，设公理E与公理E^-是相反的，今欲证明相容的公理系统$\Sigma+E$中的E是独立的，只要证明$\Sigma+E^-$是相容的就可以了。

现在欧氏公理V与罗氏公理V'是相反的，欲证明绝对几何公理系统$+V$中的V是独立的，只要证明绝对几何公理系统$+V'$是相容的就够了。

从这个基本思想出发，罗巴切夫斯基大胆地提出了与欧氏平行公理V相反的罗氏平行公理V'去代替V，在公理系统Σ

$+V'$中，对于每一个以前的命题运用归谬法一一进行逻辑推证，都找不出矛盾，而是始终相容的。于是断定公理V不是属于绝对几何公理系统（I—IV）的，而是独立的。从而结束了两千年来对欧几里得第五公设是否可以证明的悬案，以后再也没有人去试图证明第五公设了（为了简便，可以建立一种模型，在模型里验证各组公理的相容性）。

更重要的是从罗氏平行公理V'中，导出了一整套逻辑上相容的非欧几里得几何，建立了不借助于直观，不为直观所束缚，突破了传统的观念形态，逻辑地建立了自成体系的罗巴切夫斯基几何。在罗氏几何中，三角形内角和是小于180°的，而且不是一个定值。

必须提到与罗巴切夫斯基同时代的人约翰·波里埃（1802—1860），也同样有这样的想法。他的作品发表迟于罗巴切夫斯基。还有高斯（1777—1855），也有同样的新颖的思想，不过他从来没有正式发表过文章，因为他是当时的数学权威，值顾虑到发表这样"怪诞"的作品，可能引起一些人的反对，而有损于他的权威。他在给朋友的信中说："…因为我发表自己的全部意见时，我害怕会引起标了人的喊声。"(标丁人是指愚能的人。)

1826年2月，罗巴切夫斯基在喀山大学物理数学系会议上宣读了《关于几何原理的议论》以后，继续发表了《关于几何原本》、《想象中的几何》、《具有完全平行线论的新几何原本》等，在他逝世的前一年又出版了《泛几何》。

尼古拉·伊凡诺维奇·罗巴切夫斯基生于1793年，他是一个贫家的孩子，三岁丧父，由母亲抚养上学，对数学最感兴趣。

1810年（17岁）获硕士学位，1814年（21岁）得纯粹数学副教授职位，1816年（23岁）得教授职位，终生从事数学研究工作，从1827—1846年，他当了20年喀山大学的校长。

§2 罗巴切夫斯基关于平行线的理论

现在我们来探讨在平面上两条直线的位置关系。

设AB是平面上的一条直线，C是AB外的一点，现在让我们来说明，通过C点的所有直线与直线AB有着怎样的相互关系。

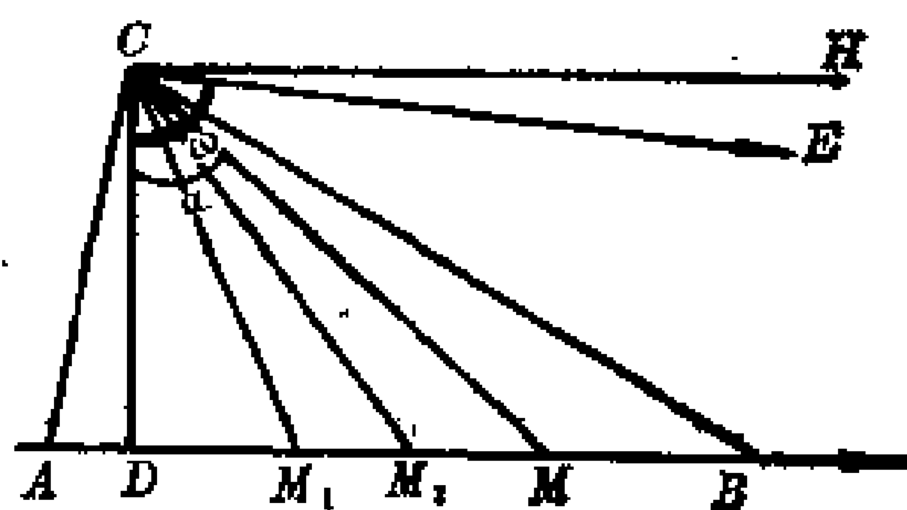


图 44

从C点可引唯一的垂线CD，设直线AB上的点M，在A到B的方向下无限远离A点时，那么必有射线CM_1介于CD和CM_2之间，射线CM_2介于CM_1和CM_3之间，……

从而 $\angle DCM_1<\angle DCM_2<\angle DCM_3<\cdots\cdots$

即有 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\cdots\cdots$

故知角α是单调递增的。

又由三角形DMC里，$\alpha<$直角，

故知角α是具有上界的。

根据根限的判定：凡是单调递增有上界的数列必有极限，而且它的极限大于数列的任何值。

令角α_1，α_2，α_n，…，的极限为ω，

就有 $\mathrm{Lim}\alpha=\omega$ 且 $\omega>\alpha$ （后面还会严格证明）

其次，可以证明，构成角ω的射线CE与直线AB决不相交。

使用反证法证明如下：

如果CE和AB相交于某一点P，

即 $\angle DCP=\angle DCE=\omega$。

那么，根据公理Ⅱ$_2$，在直线AB上至少存在一点M，使P介于D、M之间，即

$\angle DCP<\angle DCM=\alpha$，于是得到$\omega<\alpha$的结论，这与$\omega>\alpha$相矛盾，所以$CE$决不与$AB$相交。

另外我们可以证明 $\text{Lim}\alpha=\omega<\frac{\pi}{2}$。

因为α在变动过程中总是小于$\frac{\pi}{2}$的，所以它的极限值$\omega\leqslant\frac{\pi}{2}$。如果$\omega=\frac{\pi}{2}$的话，那就有$CH$与$CE$重合，从而$CH$就是唯一的过$C$点平行于$AB$的直线了，这样一来，就成立了欧儿里得平行公理Ⅴ了，这是不能允许的，因为我们是采用罗巴切夫斯基平行公理Ⅴ′的。因此$\omega=\frac{\pi}{2}$不能成立。所以

$$\text{Lim}\,\alpha=\omega<\frac{\pi}{2}.$$

同样的道理，直线AB上的点M'在B到A的方向下无限远离A点时，角α'（即$\angle DCM'$）也是具有上界的单调递增函数，它的极限

$$\text{Lim}\,\alpha'=\omega'<\frac{\pi}{2}$$

这里$\omega'>\alpha'$，构成ω'的射线CE'与AB决不相交。

由于CE与CE'的对称性，故知$\omega=\omega'$。

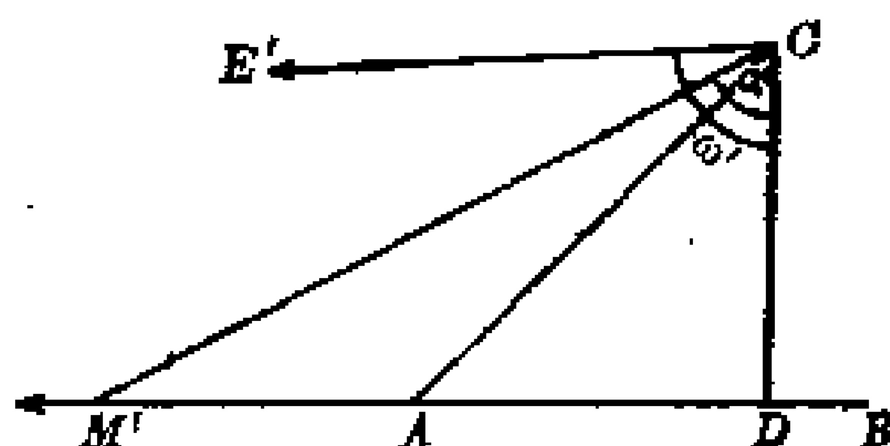


图 45

其次取CE'的补足射线CF，及射线CE的补足射线CF'，那么介于CE、CF之间（或介于CE'和CF'之间）的任何射线CK与AB决不相交。CK的补足射线CK'介于CE'和CF'之间，因而CK'也不与AB相交。这就是说，补足射线CK、CK'所在的直线与AB决不相交。

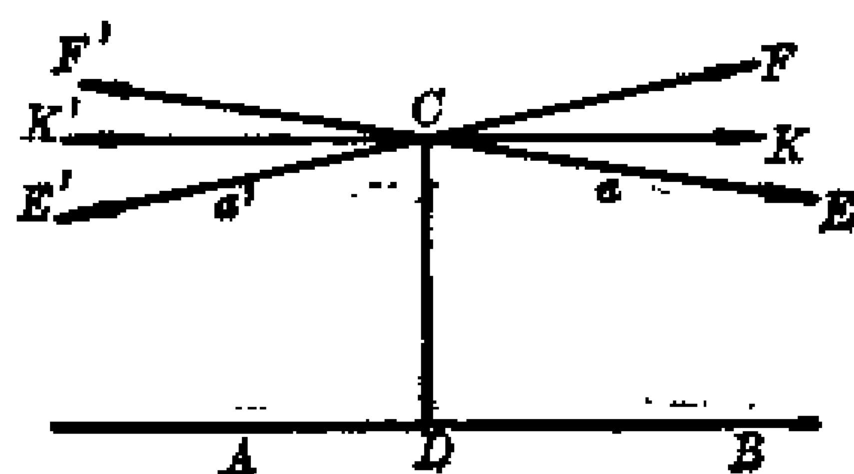


图 46

综上所述，可见通过C点而在这平面上有着无穷多条直线都与直线AB相交，这些相交的直线叫做直线AB的相交线，也有着无穷多条直线都与AB不相交，这些不相交的直线叫做直线AB的分散线（或者称为超平行线）。这些相交直线与分散直线的界限直线，即CE所在的直线a（或者CE'所在的直线a'），是直线AB关于点C而在A到B方向（或者在B到A的方向下）的平行线。

因此，我们可以把平行线的定义，写成如下的形式：

定义1 如果（1）直线CE与AB不相交，而且（2）凡在$\angle ACE$里的任何射线CM与直线AB相交，那么直线CE叫做直线AB在A到B方向下的平行线。

定义 2　如果直线CE是在A到B的方向下平行于直线AB，那么从C点向AB引垂线CD（D是垂足）之后，$\angle DCE$叫做线段CD的平行角ω，而线段CD叫做平行角ω的指针。

定理16　在一平面上，同一直线的两条垂线是分散线（超平行线）。

因为同一直线的两条垂线构成相等的同位角，根据定理 1 推论 2，它们是不相交的（这不依赖于欧氏平行公理），而且也不是罗氏平行线，否则平行角等于直角，这是与罗氏平行角是锐角（$\omega<\frac{\pi}{2}$）相矛盾，所以它们只能是分散线（超平行线）。

定理17　如果两条直线与第三直线所构成的同位角相等，那么这两条直线是分散线.

设直线a、b与c交于A、B，从AB中点O顺次引a、b的垂线OP和OQ，P、Q为垂足，

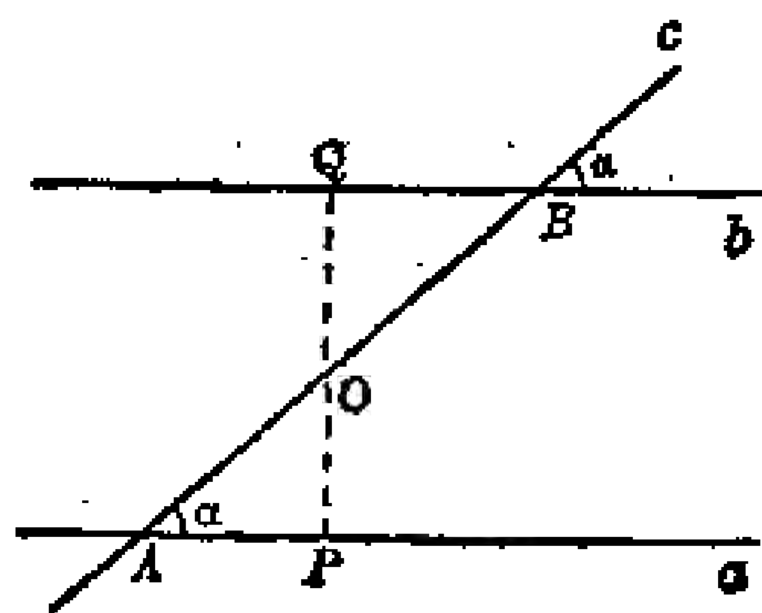


图 47

易知　$\triangle OAP\cong\triangle OBQ$（可以重合）

因而有　$\angle AOP=\angle BOQ$

从而P、O、Q在同一直线上，这样，a、b同是直线POQ的垂线了。根据定理16，a、b是分散线。

定理18　如果两条平行线与第三条直线相交，那么在平行的一侧，它们的同侧内角之和小于二直角.

设平行线a、b与第三直线C顺次交于A、B，如果在平行的一

侧的同侧内角α、β有

$$\alpha+\beta=\pi$$

就有同位角相等，由定理17，a、b是分散线，这与已知a、b是平行线矛盾。

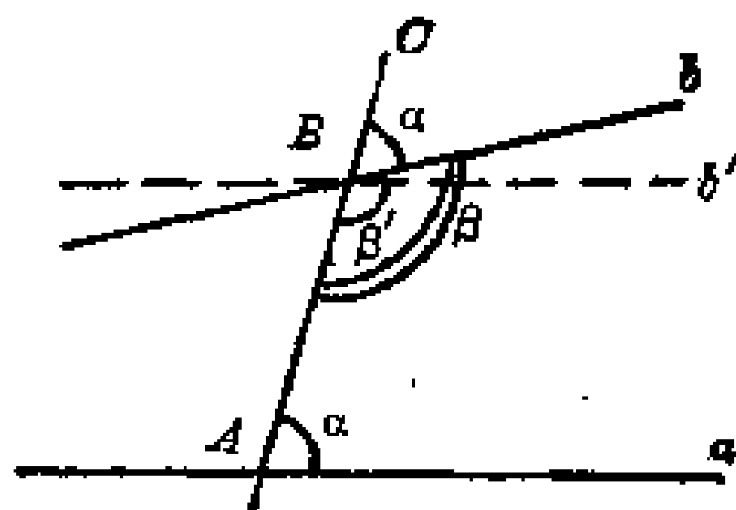


图 48

如果 $\alpha+\beta>\pi$ 的话，过B引b'，使b'、a与c所成的同侧内角为α、β'，且使 $\alpha+\beta'=\pi$ 那么由定理17，a和b'是分散线。

又因 $\beta'<\beta$，而且a、b是平行线，按定义2，直线b'与a又成为相交线了，这是自相矛盾的。所以 $\alpha+\beta$ 不能大于二直角。

最后的可能性是：同侧内角之和小于二直角成立。

定理19 从任何锐角的一边上所有各点引这一边的垂线，不可能都与这角的另一边相交。

证 因为从锐角边上所有各点所引这边的垂线，已经有一点与这边相交（垂足）了，如果这条垂线又与另一边相交的话，由定理9，过角内任一点可引一直线与角的两边都相交是与欧氏平行公理等价的。它与罗氏平行公理矛盾，所以，定理19得到了证明。

定理20 锐角的一边上所引这一边的垂线，如果与角的另一边相交，那么在角的顶点所在的一侧，如引这一边的另一垂线，它与角的另一边也必相交。

设锐角O的一边OA上的某一垂线$P'_1Q'_1$与另一边OB相交

于S_1'，而P_1Q_1是边OA上另一垂线，其中P_1，P_1'都是垂足，而且P_1介于O、P_1'之间。

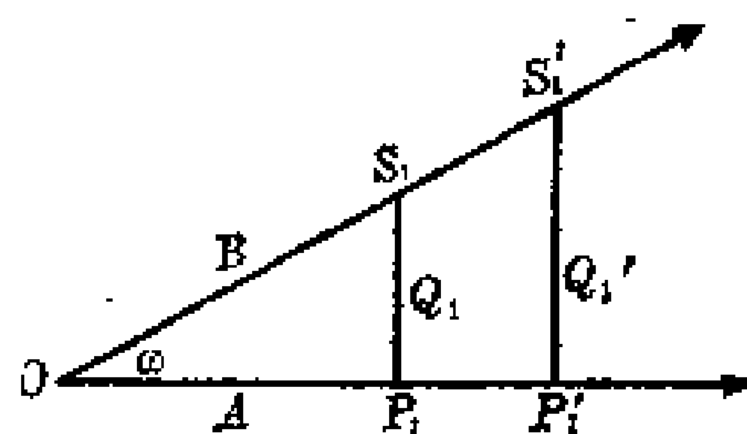


图 49

现在直线P_1Q_1与三角形$OP'_1S'_1$的一边OP'_1交于内点P_1，而与第二边$P_1'S_1'$不相交(定理16)。按帕士公理，P_1Q_1与第三边O_1S_1'必交于内点S_1，这就是说，垂线P_1Q_1与边OB也必相交。

定理21 锐角的一边上所引这一边的垂线，如果与角的另一边不相交，那么在角的顶点所在的另一侧，如引这一边的另一垂线，它与角的另一边也必不相交。

设锐角O的一边OA上某一垂线$P_2'Q_2'$与另一边OB不相交，而P_2Q_2是边OA上另一垂线，其中P_2，P_2'都是垂足，且P_2'介于O和P_2之间。

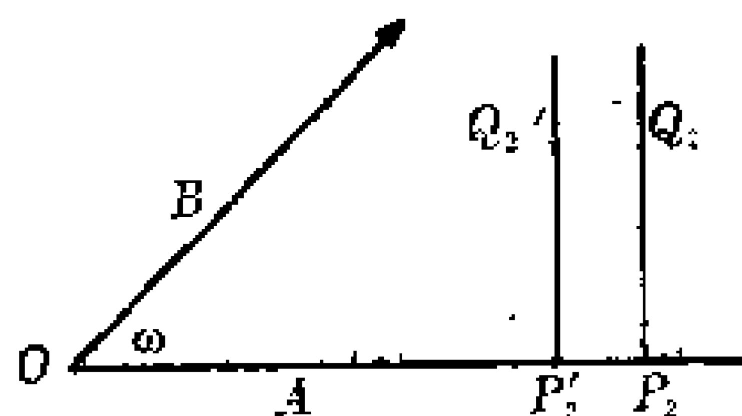


图 50

如果P_2Q_2与边OB相交的话，由定理20，$P_2'Q_2'$也应与OB相交，这是与已设条件矛盾的。所以断言，P_2Q_2与边OB决不相交。

综上所述，可见任何锐角的一边上的垂线分成两类，第一类是与另一边相交的，第二类是与另一边不相交的。根据戴得京特命题(连续公理Ⅳ)，存在一条分界垂线，在分界垂线与角的顶点一侧的所有垂线与角的另一边相交；而在角的顶点另一

侧的垂线与角的另一边不相交。

容易证明，分界垂线PQ是属于第二类的，即PQ必不与OB相交。不然的话，如果PQ与OB交于一点S，而在OB上取一点S_1，使S介于O与S_1之间，从S_1引OA的垂线S_1P_1，那么S_1P_1必在第二类上，但S_1P_1是与OB相交的，它又属第一类，这是自相矛盾的。所以，PS属于第一类是不可能的。就证明了分界垂线PQ必属于第二类。

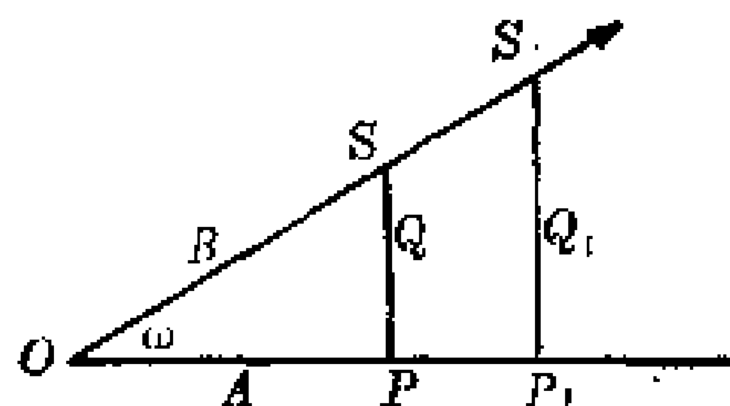


图 51

定理22 任何锐角的一边上的分界垂线必与角的另一边平行。

设锐角O的一边OA上的分界垂线是PQ，据分界线的定义（如上所述），PQ是与另一边OB不相交的．所以只要证明$\angle OPQ$内的任何射线PC必与OB相交就可以了。

如果所取的点C与点P位于OB的异侧，那么线段PC与OB已是相交的了。

如果所取的点C在角O的内域，因而点C与P位于OB的同一侧，不难证明PC与OB也是相交的。实际上从C点引OA的垂线P_1C（P_1是垂足），由于P_1C是属于第一类的垂线，它必与OB相交于一点S_1，按帕士公理，直线PC与三角形OP_1S_1的一边O_1S_1必交于一点U。

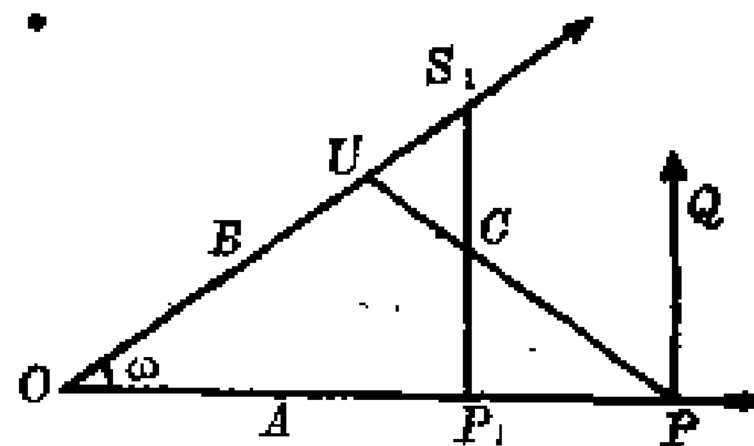


图 52

这样一来，直线PQ与OB不相交，而且$\angle OPQ$内的任何射线PC与OB相交，故按平行线定义（定义 2）知PQ与OB平行，因而本定理得证。

§3 罗巴切夫斯基函数 $\omega=\Pi(x)$

这里引进一个有趣的函数，先让我们阐明平行角ω与其对应的指针x的函数关系。

定理23 平行角ω是其指针x的单值函数（即对于每一个x的值只有唯一的一个角ω值与之对应）。

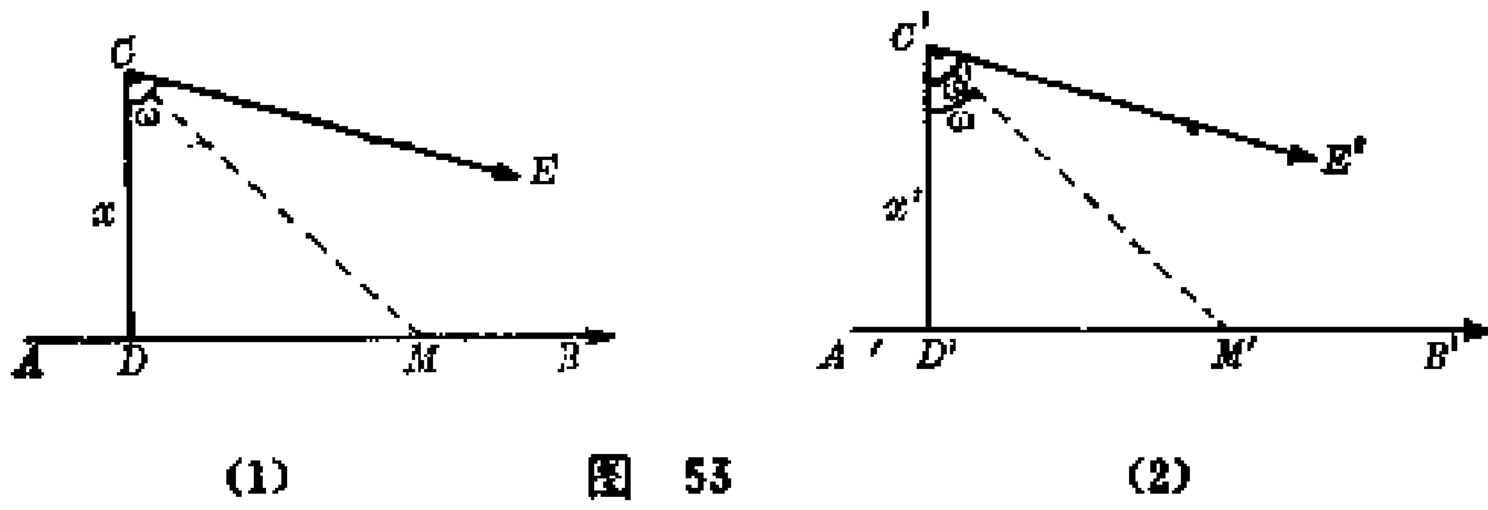
设直线 $CE\parallel AB$ （在A到B的方向下），而且 $CD\perp AB$ 于D，

即 $CD=x$，$\angle DCE=\omega$

又设直线 $C'E'\parallel A'B'$ （在A'到B'的方向下），而且 $C'D'\perp A'B'$ 于D'，

即 $C'D'=x'$ $\angle D'C'E'=\omega'$。

现在要证明 $x=x'$ 时，必得 $\omega=\omega'$。



(1) 图 53 (2)

如果 $\omega<\omega'$ 的话，在ω'里可引一射线$C'M'$，使与射线$C'D'$所成的角 $\angle D'C'M'=\omega$，同时由于 $C'E'\parallel A'B'$，

按定义2，$C'M'$与$D'B'$必交于一点M'．在射线DB上取$DM=D'M'$之后，从全等三角形$C'D'M'$、CDM中得知：

$\angle DCM=\angle D'C'M'=\omega$，从而$CE$与$CM$一致了，这是不可能的。

因为　CE与DB是不相交的，

所以　$\omega<\omega'$　是不可能的。

同样　$\omega>\omega'$　也是不可能的。

故必有　$\omega=\omega'$。

由此可见，平行角ω可取做它的指针x的函数，这个函数称为罗巴切夫斯基函数，记做：

$$\omega=\Pi(x)$$

定理24　任意锐角ω，可以取做平行角．这就是说，对于任意锐角ω总存在唯一的线段x，使　$\omega=\Pi(x)$．

设锐角ω的二边为OA、OB，按定理22，在ω的一边OA上存在着它的分界垂线PQ与另一边OB平行，从而由顶点O到垂足P的线段OP就是ω的指针x．

不难证明，边OA上的分界垂线PQ是唯一存在的．不然的话，要是边OA上另有分界垂线$P'Q'$，那么PQ，$P'Q'$同是OA的垂线，由定理16它们是分散线．另一方面按定理22，PQ、$P'Q'$都是OB的平行线，因而PQ、$P'Q'$也是平行线，这是自相矛盾的．因此否定了OA上有另外的分界垂线，所以说OA上的分界垂线是唯一存在的。

所以对于任何锐角ω总存在唯一的线段x，使　$\omega=\Pi(x)$　这就是本定理的证明。

定理25 罗巴切夫斯基函数 $\omega=\Pi(x)$ 是单调递减的，而且x从0增至∞时，ω从$\frac{\pi}{2}$减少至0.

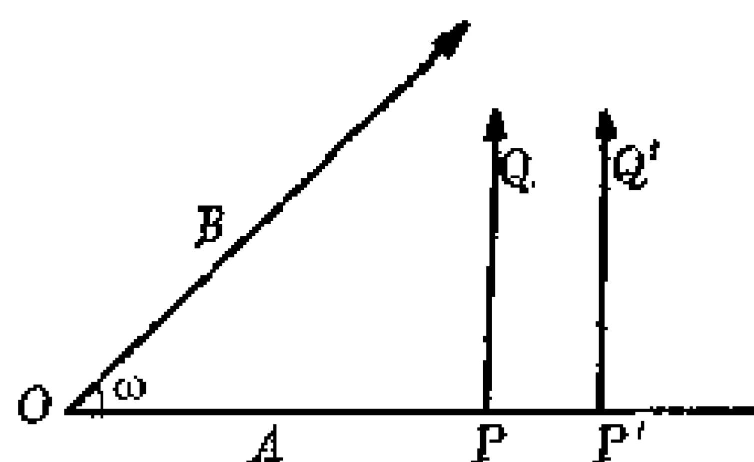


图 54

1° 证明函数 $\omega=\Pi(x)$ 是单调递减的，即 $x_2>x_1$ 时，$\omega_2<\omega_1$.

首先证明：当$x_2>x_1$时，不可能 $\omega_2=\omega_1$.要是 $\omega_2=\omega_1$，按定理17，C_1E_1与C_2E_2是分散线；另一方面因 $C_1E_1 /\!/ AB$，又 $C_2E_2 /\!/ AB$，从而C_1E_1与C_2E_2又是平行线，这是自相矛盾的．所以当 $x_2>x_1$ 时，不可能有 $\omega_2=\omega_1$.

当$x_2>x_1$时，也不可能有$\omega_2>\omega_1$.要是$\omega_2>\omega_1$，那么在ω_2里引射线C_2E_2'，使与C_2D所成的角$\omega_1'=\omega_1$之后，射线C_2E_2'必在ω_2的内部（因$w_2>\omega_1$），这样一来，按定理17，C_2E_2'与C_1E_1是分散线，另一方面按平行线定义，$C_2E_2 /\!/ C_1E_1$，因而ω_2内的任何射线C_2E_2'与C_1E_1又是相交线，这是自己互相矛盾的。

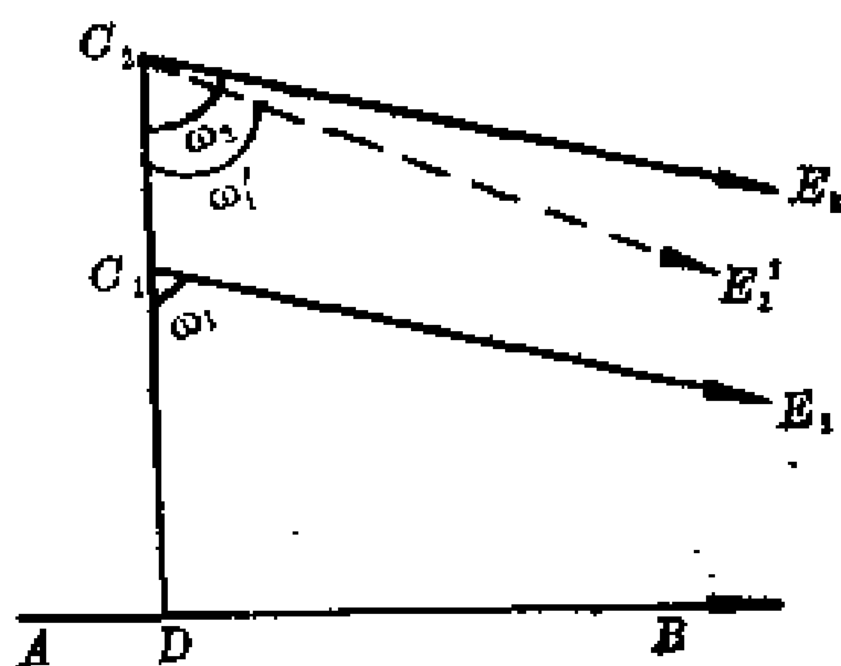


图 55

所以当$x_2>x_1$时，不可能有$\omega_2>\omega_1$.

故当$x_2>x_1$时，必然有$\omega_2>\omega_1$.

2° 由1°知x从 0 增至∞时，ω是单调递减的．现在单调递减函数$\omega=\Pi(x)$是有下界的，因任何平行角ω总是正的，即$\omega>0$．凡有下界的单调递减函数必有极限，而且它的极限值小于函数的任何值．再由定理24，故必有

$$\lim_{x\to\infty}\omega=0 \text{ 即} x\to\infty\text{时，} \omega=\Pi(x)\longrightarrow 0\text{。}$$

反之，x从∞减至 0 时，ω单调递增，但上界$\omega<\frac{\pi}{2}$．

凡有上界的单调递增函数必有极限，而且它的极限值大于函数的任何值，再由定理24，故必有

$$\lim_{x\to 0^+}\omega=\frac{\pi}{2} \quad \text{即 } x\to 0^+\text{时，} \omega=\Pi(x)\to\frac{\pi}{2}.$$

§4 罗巴切夫斯基几何关于三角形的内角和问题

定理26 萨开里四角形的顶角是锐角．

证 设$ABCD$是萨开里四角形，即$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{2}$，且$AD=BC$从$C$点、$D$点顺次引$CE$、$DF$，使都是$A$到$B$的方向下平行于$AB$，由$w=\Pi(x)$得平行角$\angle BCE=\Pi(BC)$，$\angle ADF=\Pi(AD)$．

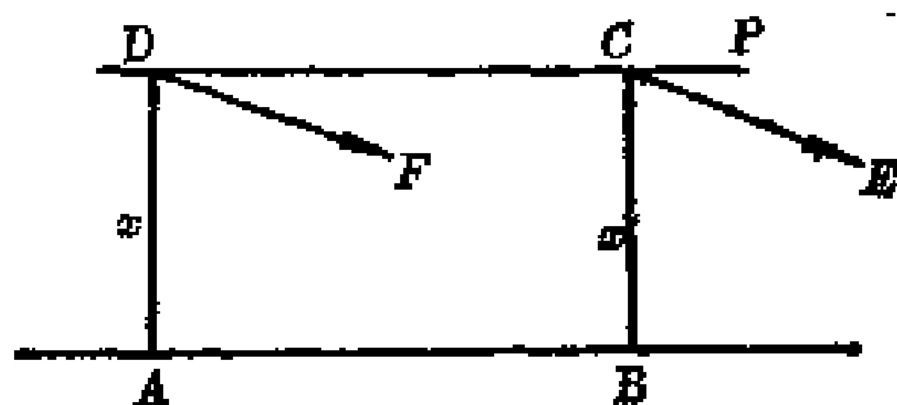


图 56

因$AD=BC$ 故$\angle BCE=\angle ADF=\omega$．

又由定理18，同侧内角之和小于二直角，知

$$\angle FDC+\angle C+\angle BCE<\text{二直角}$$

在DC上取点P，使C介于D、P之间，得

$$\angle ECP+\angle C+\angle BCE=\text{二直角}$$

故　$\angle ECP>\angle FDC$

因而　$\angle ECP+\angle BCE>\angle FDC+\angle ADF=\angle D$

但萨开里四角形的顶角是相等的，即$\angle D=\angle C$(定理2)

故　$\angle ECP+\angle BCE>\angle C$即　$\angle BCP>\angle BCD$

故　$\angle C\angle\frac{\pi}{2}$

定理27　萨开里四角的内角和小于四直角。

因为它的两底角都等于直角，两个顶角都小于直角，故四内角之和小于四直角。

定理28　任何三角形的内角和小于二直角。

由于萨开里四角形的内角和小于$4d$(d表示直角)，其中$\angle A=d$，$\angle B=d$，$\angle C<d$，$\angle D<d$，

即　$\sigma_1(\triangle ABC)+\sigma_2(\triangle ACD)<4d$

这里$\sigma_1(\triangle ABC)$、$\sigma_2(\triangle ACD)$表示$\triangle ABC$、$\triangle ACD$的内角和。

又因在定理1中，我们已证明了任何三角形内角和小于或等于二直角，所以

$$\sigma_1(\triangle ABC)\leqslant 2d,\ \sigma_2(\triangle ACD)\leqslant 2d$$

联系　$\sigma_1(\triangle ABC)+\sigma_2(\triangle ACD)<4d$
可知在$\sigma_1(\triangle ABC)$或$\sigma_2(\triangle ACD)$中，至少有一个是小于$2d$的。

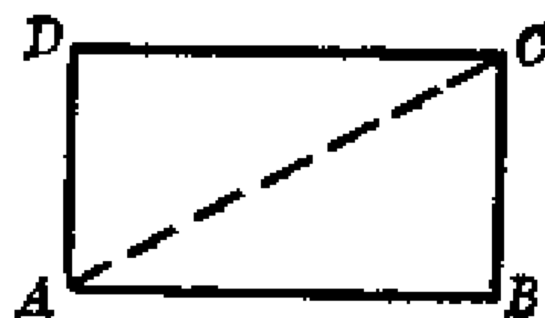


图 57

又我们在定理3里已证明了如果存在某一个三角形的内角和小于$2d$，那么

任何三角形的内角和也小于$2d$。

到此为止，我们已证明了任何三角形的内角和小于二直角。

定理29 四角形的角小于四直角。

这是因为在四角形内引一条对角线划分成两个三角形，而这两个三角形每一个的内角和都小于二直角，所以四角形的内角和小于四直角。

定理30 矩形不存在。

这是因为矩形的每一个内角都是直角，它的角和等于四直角，与定理29矛盾。

定理31 如果三角形被贯线划分成为一个三角形及一个四角形，那么原三角形的内角和小于划分出来的三角形的内角和。

设一直线与$\triangle ABC$的边AB、AC顺次交于内点B'、C'，使成$\triangle AB'C'$及四角形$BCC'B'$，用α、β、γ顺次表$\triangle ABC$的内角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$，用β、γ、y、x顺次表四角形$BCC'B'$的内角，由定理29，得

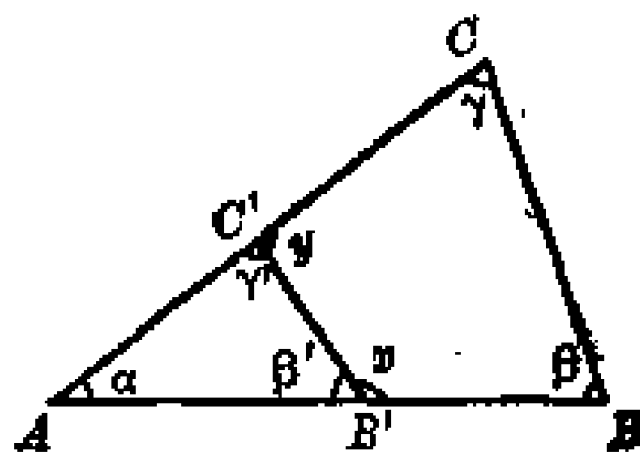


图 58

$$\beta+\gamma+x+y<4d,\ \text{但}\ x+y=4d-\beta'-\gamma'$$

故有 $\beta+\gamma+4d-\beta'-\gamma'<4d$

即 $\beta+\gamma<\beta'+\gamma'$

故 $\alpha+\beta+\gamma<\alpha+\beta'+\gamma'$

即证明了原三角形ABC的内角和小于$\triangle AB'C'$的内角和。

定理32 所有三角形的内角和不是一个常数。

在任意三角形ABC内，引贯线 BD，交BC于内点D.

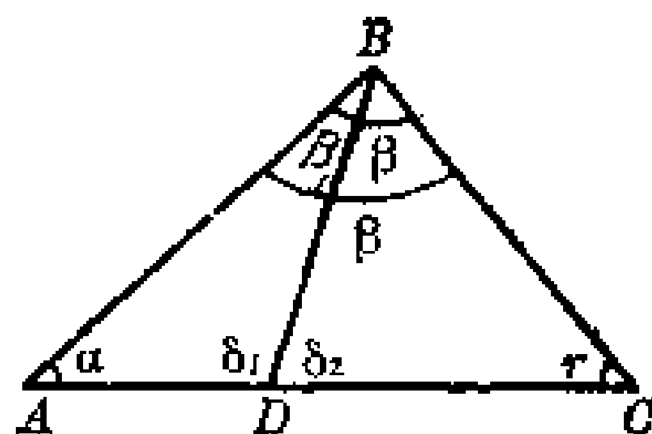


图 59

设所有三角形的内角和都等于常数k.用α、β、γ；α、β_1、δ_1；γ、β_2、δ_2分别表示$\triangle ABC$、$\triangle ABD$、$\triangle DBC$的内角.就有

$$k=\alpha+\beta+\gamma$$

$$k=\alpha+\delta_1+\beta_1$$

$$k=\gamma+\delta_2+\beta_2$$

把后两式相加 $2k=\alpha+(\beta_1+\beta_2)+(\delta_1+\delta_2)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma+\pi$

再由第一式　　$2k=k+\pi$

故得　　$k=\pi=2d$

这是与定理28任何三角形内角和小于二直角矛盾的.所以任何三角形内角和不能是一个常数.

定理33　两个三角形中，其中一个三角形的三个内角，顺次等于另一三角形的三个内角，那么这两个三角形是全等形.

设$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中：$\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$.因为$\angle A=\angle A'$，由合同公理，可以把$\angle A$的两边分别重合到$\angle A'$的两边上，这时可能出现四种情况：

(1)如果B、C分别在$A'B'$、$A'C'$的内部，则四角形$BB'C'C$中的内角和

$$\beta'+x+y+\gamma'=\beta'+(2d-\beta)+(2d-\gamma)+\gamma'=4d$$

这与定理29矛盾，所以情况(1)不会出现.

(2)如B(或C)中有一点与B'重合(或C)，而另一点C(或B)不

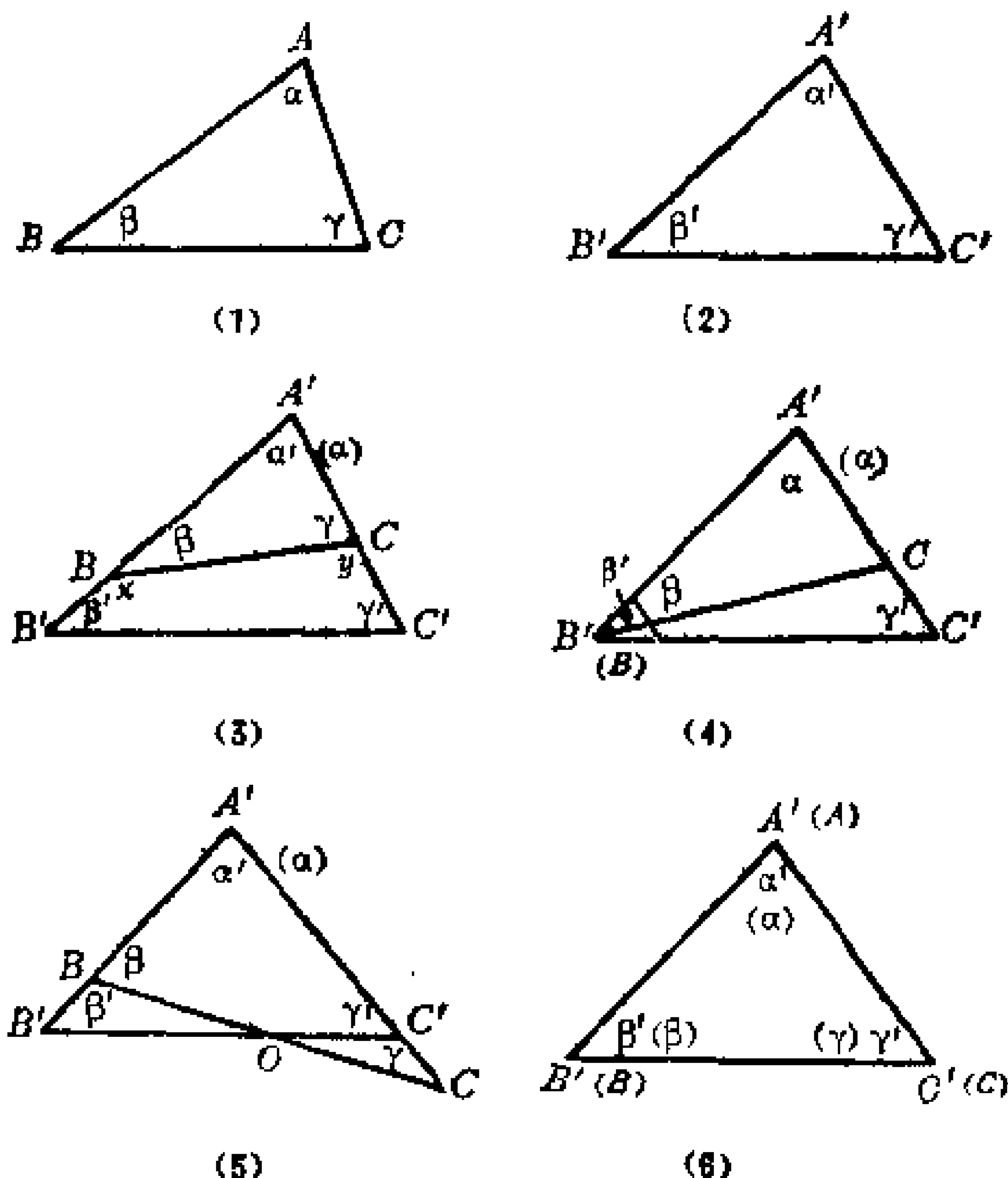


图60

与C'(或B')重合，那么就有$\beta'>\beta$(或$\beta'<\beta$)，这与已知$\beta'=\beta$矛盾，所以情况(2)不会出现。

(3)如果B、C中有一个点落在$A'B'$内部，另一点C落在$A'C'$的延长线上，则在$\triangle B'BO$中外角$\angle A'BC>\angle B'$，即$\beta>\beta'$这与已知$\beta=\beta'$矛盾，所以情况(3)不会出现。

(4)最后只有B、C都分别落在B'，C'上，这种情况必然出现。这时A与A'重合，B与B'重合，C和C'重合，所以$\triangle ABC$与

$\triangle A'B'C'$是全等形.

谈到这里，我们不妨想想，我们已经推证出一系列与我们在中学几何课里的定理相矛盾的新定理。如果我们在中学里说两个三角形的三个内角对应相等，就说这两个三角形全等，将会被同学们讥笑是无知的。可是现在居然证明它是正确的了。初看起来，似乎是自相矛盾的，现在我们知道了，问题的实质是由于欧氏平行公理与罗氏平行公理的截然相反，而引出两种不同的几何体系，在各自的逻辑体系中得出自己正确的结论。这样的情形并不足为怪，而且也是十分自然的。关键在于我们的逻辑系统是否存在错误，如果都没有错误的话，我们就应该同时承认它，深信它。为了加深这方面的认识，我们下面还要进一步谈一些更有趣的问题，它对于启发我们的思维，开拓我们的思维领域，更进一步地研究宇宙空间的几何结构，特别是对"相对性原理"的探讨，将是十分有益的。

§5 罗巴切夫斯基几何关于三角形的面积问题

大家熟知，在欧几里得几何里，三角形的面积S等于一条边a及这边上的高h的乘积的二分之一，即

$$S=\frac{1}{2}ah$$

也就是说，面积S与一边长和这边上的高的乘积成正比，即

$$S=k\cdot(ah)$$

显然，这里的 $k=\frac{1}{2}$。

我们要问，在罗巴切夫斯基几何中，三角形的面积所对应的数又是同什么样的数成比例呢？它的面积公式又是怎样的呢？

前面说过，在罗氏几何中，三角形的内角和小于π，而且不是一个常数，即每一个三角形的内角和不一定相同，就是说每个三角形的角亏

$$\delta=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)$$

应该不相同。有趣的是，罗氏几何中三角形的面积与角亏δ成正比，

即　$S=k[\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)]$

就是　$S=k\cdot\delta$　（这里k是罗氏常数）

为了阐明这个公式的由来，我们需要回顾一下，在欧氏几何中是怎样研究面积理论的。

要想建立平面多边形（指简单多边形）特别三角形的面积概念，即要找出一种方法，使得每个这样的多边形各对应的正数，适合下列两项要求：

（1）　全等的多边形对应以相同的面积，即相同的正数S。（相等性）

（2）　两个多边形之和的面积（数S），等这两个多边形面积之和（S_1+S_2）。即

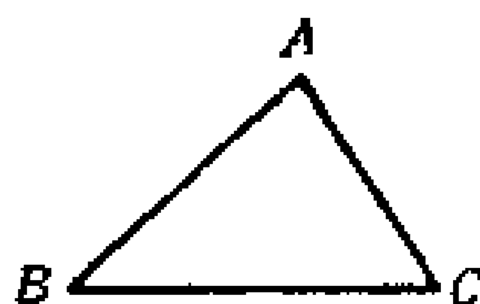
$$S=S_1+S_2\quad（可加性）$$

一个多边形满足上述两项要求所对应的数S，称为多边形的面积S。

例如，在欧氏几何中：

（1）　$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$，

则说　$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$　这是十分明显的。即$\triangle ABC$的面积S等于$\triangle ABD$的面积S_1与$\triangle ADC$的面积S_2之和。



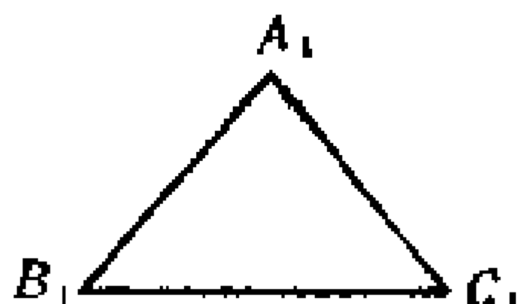


图　61

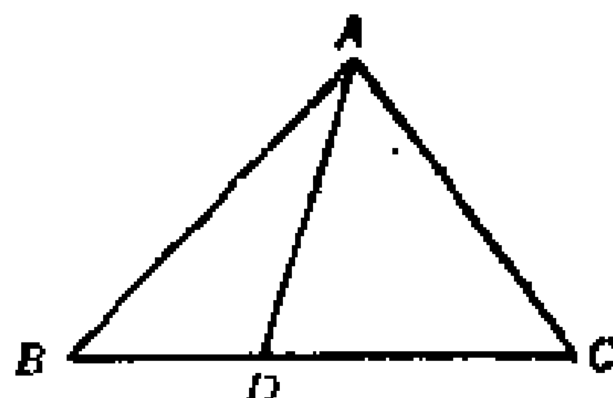


图　62

即　$S = S_1 + S_2$

符合这样的数S，就称为$\triangle ABC$的面积，这都是大家所熟悉的事实。

现在我们要研究罗巴切夫斯基几何里，多边形的面积特别是三角形的面积，同样地也要用一种方法，找到符合上述两项条件的相家的数，来定义罗巴切夫斯基多边形的面积。

对三角形来说，我们的目的是证明在罗氏三角形中，每一个三角形都对应与其角亏〔$\delta = \pi - (\angle A + \angle B + \angle C)$〕成正比的数，以建立面积的度量关系。

前面我们已经证明过：罗氏三角形如果每个角对应相等，则这两个三角形全等（定理33）。反之，两个全等三角形，它们的对应角相等，当然它们的内角和相等，相应地它们的角亏也相等，这是符合第一项要求：全等形对应以相同的角亏δ。

要进一步阐明可加性，就是要阐明：任一多边形的面积，对应于此多边形所分成的诸三角形的面积之和，而且多边形的

面积与将多边形分成三角形的方法无关。就是说，无论怎样分法，这个多边形的面积都等于所分成的诸三角形面积之和。

定理34 若两个萨开里四边形的上底相等，而且对应的锐角也相等，则这两个萨氏四边形全等，因而有相同的面积。

证 设在两个萨氏四边形$ABCD$和$A'B'C'D'$中，上底CD和$C'D'$相等，并且CD、$C'D'$旁的二锐角相等，都等于α。

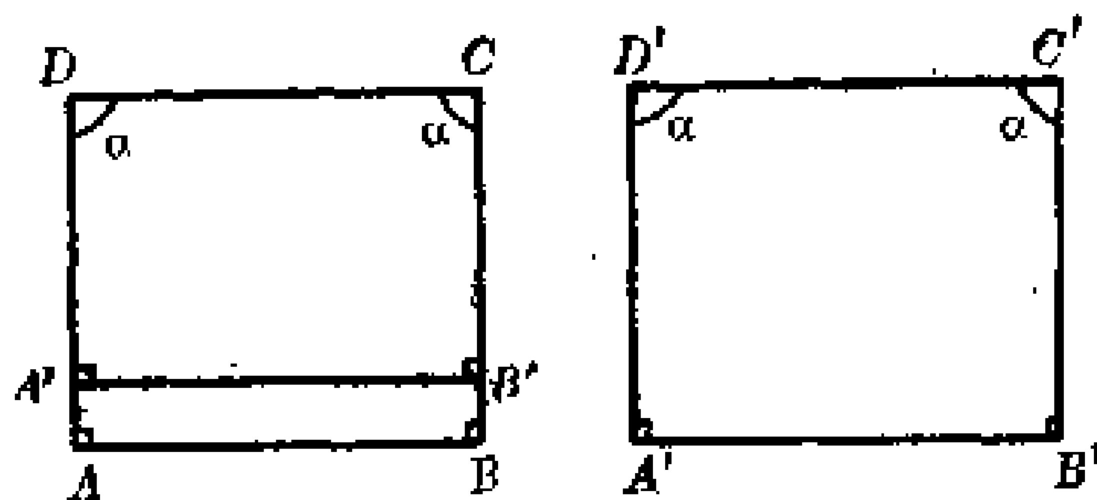


图 63

把$A'B'C'D'$重叠于$ABCD$上，使$D'C'$与DC重合，由于锐角相等，直线$D'A'$落在直线DA上，直线$C'B'$落在直线CB上。问题在于点A'是否落在A上，点B'是否落在B上。

如果A'不重合于A，B'不重合于B，而且A'落在AD内，B'落在CB内，且$A'B'$一定在AB的同侧，那么根据萨氏四边形的性质，A、B、A'、B'都是直角，那么四边形$ABB'A'$的内角和等于四直角了，但这是与定理29矛盾的。所以A'必重合于A，B'必重于B，因此，这两个萨氏四边形$ABCD$和$A'B'C'D'$全等。

由于全等形有相同的面积，所以萨氏四边形$ABCD$与萨氏四边形$A'B'C'D'$有相同的面积。

定理35 设萨氏四边形的上底等于一个三角形的一边，而它的两个锐角之和等于三角形内角之和，那么它们的面积相等。

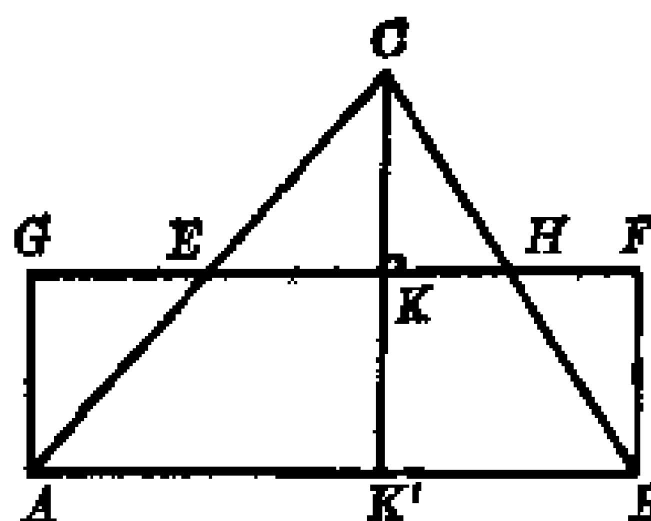


图 64

证 如图64，取 AC、BC 的中点E、H，从A作EH的垂线AG，从B作EH的垂线BF，从C作EH的垂线CK，交 EH 于K交AB于K′。

很明显，直角三角形AGE和直角三角形 CKE 中，有斜边$AE=EC$，对顶角$\angle AEG$与$\angle CEK$相等，所以它们全等。

同样三角形 BFH 和三角形 CKH 全等，因而有$\angle KCE=\angle GAE$，$\angle KCH=\angle FBH$．又 $AG=CK=BF$，所以$ABFG$是萨氏四边形，它的锐角和等于三角形ABC内角之和，而且三角形ABC和萨氏四边形$ABFG$有相同的组成部份，所以它们的面积相等。

如果K在EH的延长线上，可以得到相同的的果。

定理36 具有一对相等边及相同的内角和的两个三角形有相同的面积。

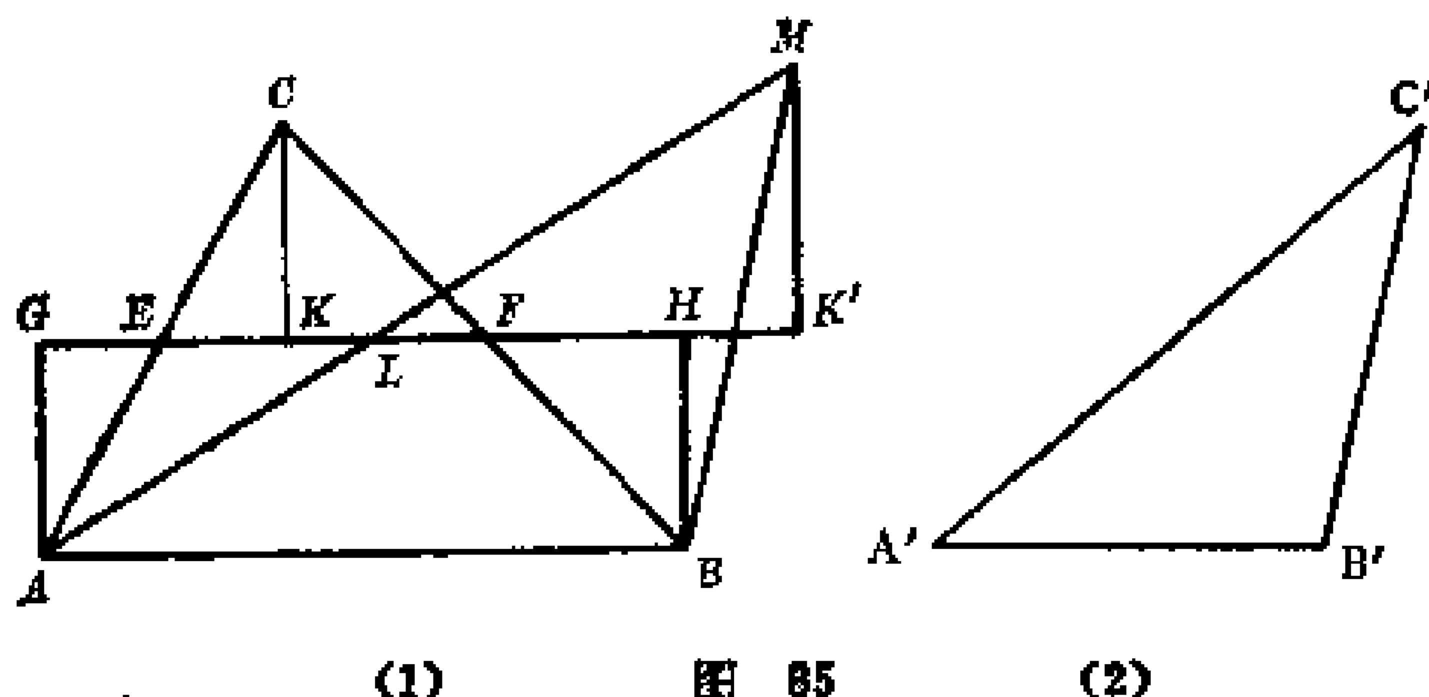
证 设在两三角形ABC和$A'B'C'$中，$AB=A'B'$，并且角和 $\angle A+\angle B+\angle C=\angle A'+\angle B'+\angle C'$.

同定理35的方法一样，分别在边AB和$A'B'$上各作萨氏四边形，使与这些三角形等积．但是这两个萨氏四边形有相等的底及相同的锐角（都等于所设三角形的内角和），由定理34，这

两个萨氏四边形的面积相等，从而这两个三角形ABC和$A'B'C'$面积相等。

定理37 具有相同内角和的三角形必有相同的面积。

证 假设三角形ABC和$A'B'C'$的内角和相同，且AC



(1)　　图 85　　(2)

$<A'C'$在底边AB上，如前而所述的方法，作萨氏四边形$ABHG$。

其次在EF上一点L，使$AL=\frac{1}{2}A'C'$ 延长AL至M，使$AL=LM$ 联MB，得新三角形AMB。我们要证明：三角形AMB的内角和等于三角形ABC的内角和。

作 $MK'\perp GH$，直角三角形$LK'M$和AGL有相等的斜边$AL=LM$，对顶角 $\angle ALG=MLK'$，所以它们全等，从而 $AG=MK'$。

设O是BM和HK'的交点，因而 $BH=AG=MK'$ 从而直角三角形BHO、$MK'O$全等，于是 $BO=OM$

所以原来的GH也就是过三角形MAB两边中点的直线，由前面所论证的定理35的过程，得知三角形ABM的内角和等于

萨氏四边形$ABHG$的锐角和，而三角形ABC的内角和也等于萨氏四边形$ABHG$的锐角和，因此三角形ABM与三角形ABC的内角和相等。

又已知三角形 ABC与$A'B'C'$的内角和相等，于是三角形ABM与$A'B'C'$的内角和相等。

但是三角形ABM和$A'B'C'$有一边 $AM=A'C'$，又内角和相等，由定理36它们的面积相等。

同样，三角形ABC和ABM有一边AB相等，内角和相等，那么它们的面积相等。因此三角形 ABC和$A'B'C'$面积相等。（证完）

这个定理说明：三角形的面积同它的内角和有关。

定理38 三角形的面积与它的角亏成正比。

证 任给三角形ABC，在AB上任取一点D，连 CD，设三角形ADC、DCB、ABC的角亏分别为δ_1、δ_2、δ。

由于 $\delta_1=\pi-(\angle DAC+\angle ADC+\angle ACD)$

$\delta_2=\pi-(\angle DBC+\angle BDC+\angle DCB)$

所以
$$\begin{aligned}\delta_1+\delta_2&=2\pi-\angle DAC-\angle DBC-(\angle ACD+\angle DCB)\\&\quad-(\angle ADC+\angle CDB)\\&=2\pi-\angle DAC-\angle DBC-\angle ACB-\pi\\&=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)\\&=\delta\end{aligned}$$

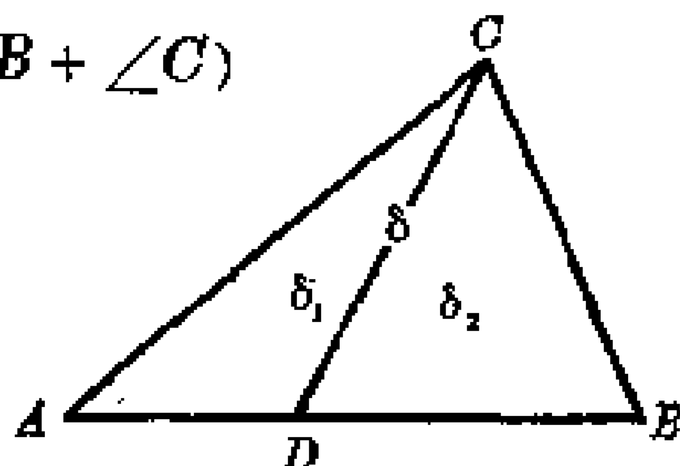


图 66

很明显，当D在点 A 到点 B 的方向下画出线段CD时，δ_1从0到δ连续地增加；当D重合于A

时，δ_1取值0；当D重合于B时，δ_1取值δ；而δ_2却从值δ减少到0。

因为三角形的面积S是与内角和有关的（定理37），而内角和 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi-\delta$ 因此可以说三角形的面积S是与它的角亏δ有关的。所以我们可以求出S作为角亏δ的函数$f(\delta)$。

即 $S=f(\delta)$

现在规定一个正数k，那么

$$S=k\cdot\delta$$

或者$S=k\cdot[\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)]$

这里的常数是罗巴切夫斯基的曲率半径ρ的平方。

就是 $S=\rho^2\cdot\delta$

或者 $S=\rho^2[\pi-(A+B+C)]$

那么ρ究竟是什么样的数呢？这里只能作粗略地介绍。

所谓罗巴切夫斯基曲率半径ρ是这样定义的：设极限曲线弧$\overset{\frown}{AB}$的高h，作为平行性线线段（指针）时，相当于平行性角$\omega=\frac{\pi}{4}$。那么测量$\overset{\frown}{AB}$的长所用的数ρ，称为罗巴切夫斯基空间的曲率半径。

我们在研究罗氏平行线性质时，有罗巴切夫斯基函数

$$\omega=\Pi(h)$$

现在，$\omega=\frac{\pi}{4}$ 为定值，因此对应一定长的线段（指针）h，而h又是极限曲线的高，它对应于一定的弧长，所以曲率半

径ρ是一定的数量（详见科士青著：《几何基础》中译本第240页）。这个数ρ就是常用的罗巴切夫斯基常数。

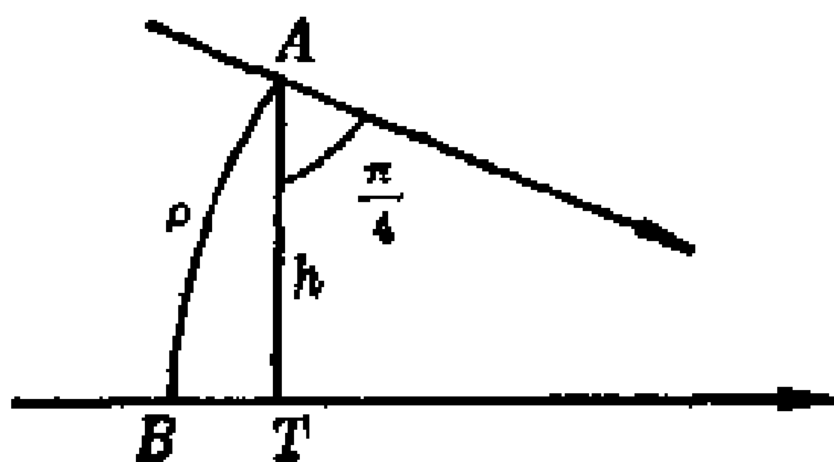


图 67

关于罗巴切夫斯基几何中的面积理论，我们不打算详谈了，如果大家有兴趣的话，请阅读下列书籍：

1. 《几何学基础》B.N.科士青著（商务印书馆），中译本第315页第七章《面积论》
2. 《高等几何学》H.B.叶非莫夫著（高等教育出版社），中译本第143页第三章§48《三角形的面积》。
3. 《几何学》Б.В.库图左夫著（高等教育出版社），中译本第307页第十一章§68《面积度量的概念》。
4. 《几何基础》钱端壮编（高等教育出版社），第275页第五章§9《罗氏几何的弧长及面积公式》。

为了引起大家的兴趣，我们提出"零角三角形"的面积问题。它对于我们习惯于欧氏几何的观念形态来说，似乎是很难相信的。过去在欧氏几何中，三角形的每一个角都不能是零，如果有一个角为零，我们就说这个三角形不存在。作为退化的三角形来说，也只能

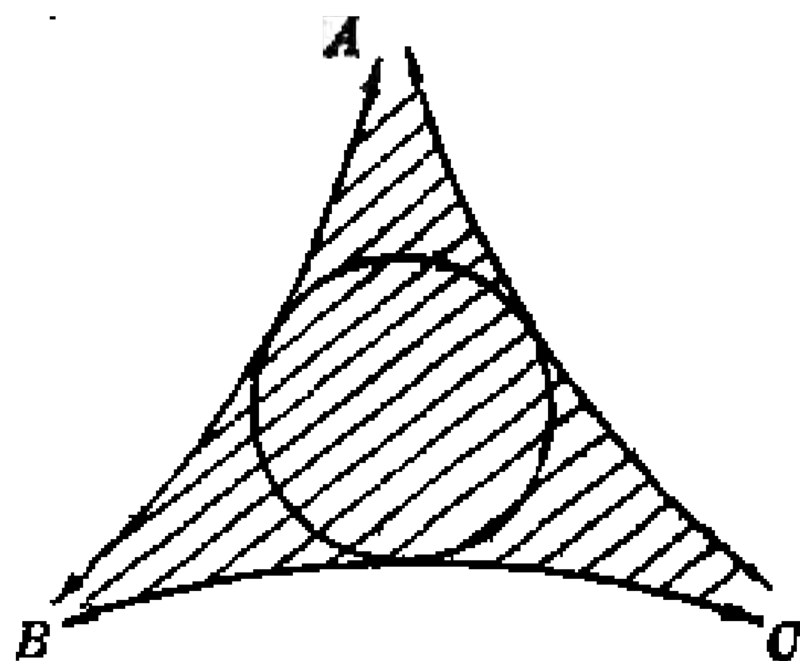


图 68

有最小的面积，对应的数是零。但是在罗氏几何中，每个角都是零的三角形，看作是一种极限情形，我们把 A、B、C 都看作无限远点，那么，他们每一个角的极限情形都是零。当然它们的角和$A+B+C$等于零。

对这样的三角形的面积

$$S=\rho^2[\pi-(A+B+C)]$$

即　$S=\rho^2\cdot\pi$ 是最大的面积，所以“零角三角形”有最大的面积。因此，任何三角形的面积不能大过“零角三角形”的面积。

§6　罗巴切夫斯基几何模型解释

基本公式　$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{\rho}}$

我们在前面谈了一些关于罗巴切夫斯基几何中有趣的命题，而这些命题在习惯上是令人难以相信的，这是由于我们脑子里充满了欧几里得几何观念的缘故，但是它在逻辑上又是无可非议的。这就很自然地产生这样的问题：欧几里得几何与罗巴切夫斯基几何究竟哪一种是真实的呢？如果都是真实的话，那么它们是在什么样的几何空间里实现呢？

要解决这个问题，一方面是依靠实际测量，另一方面是创造一种模型，在模型中来验证和实现它，前者要依靠仪器，但是仪器只能在较小的范围内使用，而且测量误差和仪器本身的误差都是不可避免的．而后者要创造这样的模型又是不容易的事情．多少年来，许多数学家在这方面作了努力。现在让我们介绍其

中较易于接受的一种模型：贝尔特拉米——克莱因(Beltromi-kleiun)解释：

假定模型通过通常的欧氏几何中所有的定理、方法和手法，在我们支配之下，以任一点为中心，任意长为半径作一个圆，作为基圆。并引进罗氏几何中的基本元素：点、直线、平面。作如下的规定：

"点"——是指基圆内通常的点。在基圆上或基圆外的点，都不能算作第一类元素"点"。明确地说："罗氏点"是基圆内的点。基圆上或基圆外的点，都不是罗氏点。基圆上的点是无穷远的点。

术语："属于"、"介于"按照通常的文字意义去理解。

为了简便，我们不准备把五组公理都在贝氏图中来验证，而是突出地察看罗氏平行公理在贝氏图中的实现。

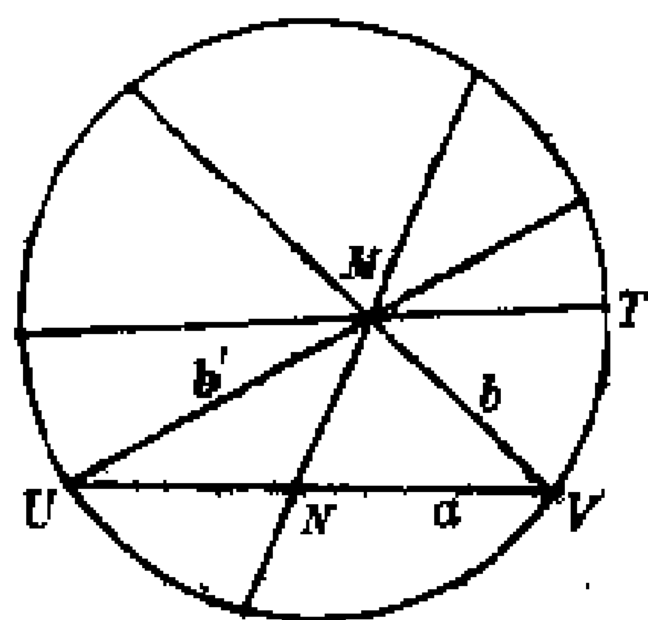


图 69

在基圆内任取一点M，M是罗氏点。作不过M的弦UV，因U、V在圆上，它们不是罗氏点，意味着U、V是直线a上的无穷远点。所以，UV表示不过M点的罗氏直线。

同样，由于U、V是圆上的点，所以MU、MV都表示罗氏直线（射线），用b'和b表示。U、V是直线b'、b上的无穷远点。这样一来，直线b'和b交直线a于无穷远点U、V，所以MU和MV是过直线a外一点M而和a平行的两条直线b'和b。

这就是说，在M和a所决定的平面内（贝氏基圆），过M至

少可以作两条直线b'和b，不与直线a相交。它实现了罗氏平行公理。

在UV上有无穷多个点，如N为UV上一点，将N与M相连接，即过M可作无穷多条直线与a相交。这些相交直线就是我们所熟知的会聚直线(相交线)。

同样，过M点可作无穷多条直线，如MT等不与直线a相交，这就是罗氏几何中的超平行线(分散线)。

很明显，所有的会聚线与超平行线，是以与a平行的两条直线b'和b为界线的，这与我们在前面所研究的完全相符合。

所以说，在贝氏图中，实现了罗氏平行公理。

如果将贝氏图改为贝氏球，对于罗氏空间也得到同样解释。

在贝氏图中，为了验证合同公理，先巧妙地规定了罗氏长度的概念。

对弦UV上的两点A、B间距离的规定：

始点为A，终点为B的线段AB分弦为两种比：第一种比是$\frac{UB}{BV}$，第二种比是$\frac{UA}{AV}$。这两种比总是正的，因为A、B是内分点，得到上面两种比的比：

$\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}$ （事实上是射影几何里的交比）以任意正数为底，取对数（一般以e为底，取自然对数），我们定义为点A、B间的距离，为了保持单位尺度的任意性，再引进一个因子$\frac{k}{2}$，通常引进$\frac{\rho}{2}$（ρ是罗巴切夫斯基曲率半径），这个距离称为“非

欧距离"，记为

$$\delta_{AB}=\frac{\rho}{2}\cdot\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)$$

为什么这样规定呢？我们只要看它是否符合合同公理的要求：

(1) 如果 $\delta_{AB}=\delta_{A'B'}$，那么 $AB\equiv A'B'$。反过来也成立。

由 $\delta_{AB}=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)$

$$\delta_{A'B'}=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{U'B'}{B'V'}:\frac{U'A'}{A'V'}\right)$$

得到 $\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{U'B'}{B'V'}:\frac{U'A'}{A'V'}\right)$　　(1)

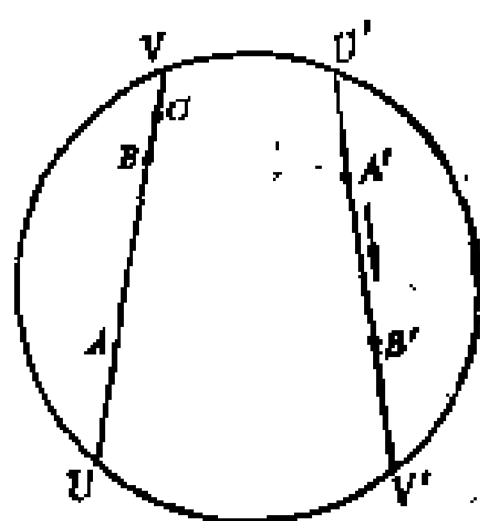


图 70

我们只要能找到这样的 B'，使得 $AB\equiv A'B'$ 就可以了。

如果 $\delta_{AB}=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)$ 是已知的，点 A' 是已定的，$\frac{U'A'}{A'V'}$ 也是已定的，上式就能从(1)式中求出未知比 $\frac{U'B'}{B'V'}$，因而求出了在直线 $U'V'$ 上点 B' 的位置，即如果 $\delta_{AB}=\delta_{A'B'}$，那么就能在 $U'V'$ 上找到唯一的点 B' 使 $AB\equiv A'B'$。反过来，如果 $AB\equiv A'B'$ 则 $\delta_{AB}=\delta_{A'B'}$，也成立。

(2) 现在来验证线段的可加性。即要证明："若 $AB+BC=AC$，则 $\delta_{AB}+\delta_{BC}=\delta_{AC}$"就可以了。

$$由于\quad \delta_{AB}=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)$$

$$\delta_{BC}=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UC}{CV}:\frac{UB}{BU}\right)$$

$$\begin{aligned}\delta_{AB}+\delta_{BC}&=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)+\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UC}{CV}:\frac{UB}{BV}\right)\\&=\frac{\rho}{2}\ln\left[\left(\frac{UB}{BV}:\frac{UA}{AV}\right)\cdot\left(\frac{UC}{CV}:\frac{UB}{BV}\right)\right]\\&=\frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UC}{CV}:\frac{UA}{AV}\right)\\&=\delta_{AC}\end{aligned}$$

这说明在贝氏图中，线段的可加性是成立的。

要注意从A点起始向AV方向用“非欧相等”的步伐“开步走”，永远不会到达V点。因为“非欧距离”AV无穷大，事实上对于趋近点V的B点来说，比 $\frac{UB}{BV}\to\infty$，而比$\frac{UA}{AV}$不变，因此 $\delta_{AB}\to\infty$。

这里提醒我们注意一个有趣的事例，当A“非欧相等”地走向V时，用欧氏观点来看，它的步伐是在逐渐地减小。因为欧氏几何中认为弦UV是有限长的。而罗氏几何认为U、V是直线UV的无穷远点，因而直线UV是无限长的。所以在罗氏几何中，是在用相等的步伐前进，但永远也不能到达V。而在欧氏几何中却以为A的步伐越来越变小了，所以它不能到达V。因此在罗氏几何中认为它的尺度是始终没有变的前进着，因旁观者的欧氏却以为罗氏的尺度是越远离越变短了。举一个例子

说明这种情况：当我们站在铁路旁边，看见一列火车从我们身边飞驰而过，我们觉得这列火车是很长的，它有30节车厢。但是火车开过以后，逐渐远离我们了，我们的视线所能看到的距离是有限的，我们仍站在原地看这列火车，好象就不怎么长了，越是远离我们，似乎这列火车就越短，甚至象小孩的玩具火车那样短了。其实火车上的乘客并没有这个感觉，事实上火车还是原来的30节车厢那样长。这个事例使我们相信罗巴切夫斯基几何是有现实意义的。而我们的模型解释也不是凭空臆造的。更重要的是这个概念对于我们研究宇宙空间是十分重要的。这也说明罗氏几何所包含的范围是那样的大，而欧氏几何的范围却是狭小的。

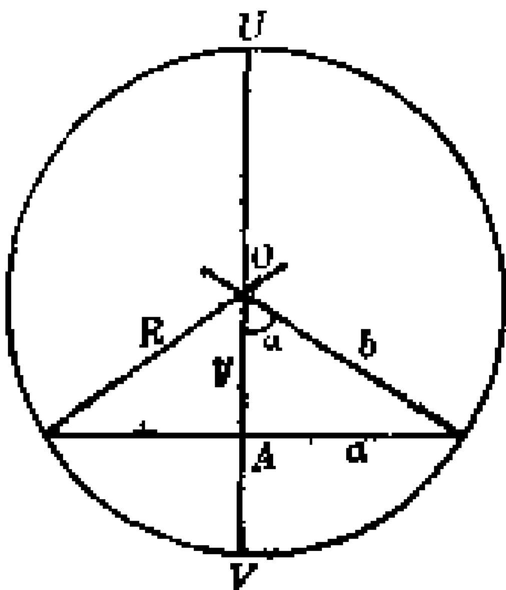


图 71

现在我们利用贝氏图，来推导著名的罗巴切夫斯基公式

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x) = e^{\frac{x}{\rho}}$$

令长为x的线段OA，对应平行角 $\alpha = \pi(x)$。在贝氏图上，平行线$a \parallel b$，$\angle A$是直角。再令R和y分别表示贝氏图上半径和线段OA的欧氏长度。另一方面线段OA的非欧长度是

$$x = \delta_{OA} = \frac{\rho}{2}\ln\left(\frac{UA}{AV} : \frac{UO}{OV}\right)$$

$$= \frac{\rho}{2}\ln\frac{R+y}{R-y}$$

这是因为 $\frac{UO}{OV} = \frac{R}{R} = 1$

并且　$UA = R + y$，$AV = R - y$

此外，在贝氏图上，欧氏长度和角之间有这样的关系式：

$$y = R\cos\alpha$$

所以
$$\frac{R+y}{R-y} = \frac{R+R\cos\alpha}{R-R\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$
$$= \mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$$

这样一来
$$x = \frac{\rho}{2}\ln\mathrm{ctg}^2\frac{\alpha}{2} = \rho\ln\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$$
$$\ln\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{x}{\rho}$$

故有
$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\pi(x) = e^{\frac{x}{\rho}}$$

这个公式在研究罗巴切夫斯基几何中起着十分重要的作用，解析证明是比较困难的，现在利用贝氏图简要地推导出来，供大家参考。

此外关于罗氏几何中角的度量和其他的问题，可参阅前面提到的著作，在此不再详谈。

8

在微小区域里罗氏几何与欧氏几何的一致性

前面，我们阐明了罗巴切夫斯基几何的一些定理和公式，看起来，已经离开欧几里得几何很远了，它们之间在形式上的矛盾是如此的突出，有时似乎是达到令人不能相信的地步，但是在逻辑上又是这样的丝毫没有错误。我们已经知道它们之间矛盾的焦点是罗氏平行公理与欧氏平行公理截然相反，因而在各自的系统里，形成两种派别的几何学。初看起来，似乎是已经水火不相容了。但是我们知道，矛盾的双方在一定的条件下是可以转化的。因此，人们要问，在什么条件下，这两种几何学才能一致呢？关于这个问题，数学家们也曾作过不少的努力，统一的方法不只是一种。在射影几何学和微分几何学里，都能找到统一的结论，关于这点后面还要介绍。现在仅就下面的情形，来探讨它们的一致性。

在微小的区域里，罗氏几何与欧氏几何是一致的。

对于这个问题可以严格证明。现在只作一些解释。

罗巴切夫斯基函数 $\omega=\Pi(x)$ 的实际意义是：平行角ω是指针x的函数。

从图72可以看出：

$$\omega_1 = \Pi(x_1)$$
$$\omega_2 = \Pi(x_2)$$
$$\omega_3 = \Pi(x_3)$$
$$\vdots$$
$$\omega_n = \Pi(x_n)$$

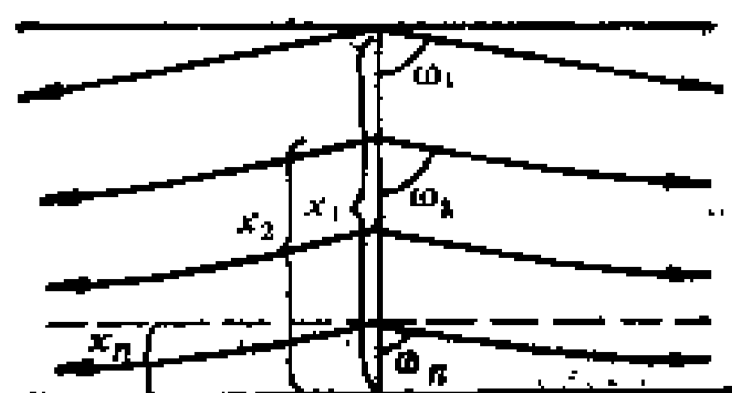


图 72

就是说，指针 x：$\cdots>x_1>x_2>x_3>\cdots>x_n>\cdots$时，平行角$\omega$：$\cdots<\omega_1<\omega_2<\omega_3<\cdots<\omega_n<\cdots$，由第7章§3有：当$x\to\infty$时，$\omega=\Pi(x)\longrightarrow 0$；

当$x\to 0$时，$\omega=\Pi(x)\longrightarrow\frac{\pi}{2}$。

这意味着当指针 x 充分小时，平行角$\omega=\Pi(x)$就会趋近于$\frac{\pi}{2}$，这时平行线b'和 b 就成为一条直线了。这样实现了欧氏平行公理——在平面上，过已知直线外的一个已知点，最多只能作一条直线与已知直线平行。所以说，在微小的区域里，在上述意义下罗氏几何与欧氏几何是一致的。这是一种直观的解释方法。

现在进一步来看罗巴切夫斯基公式。

$$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{p}}$$

如果 $x\to 0$　　　则 $\frac{x}{p}\to 0$　　$(p\neq 0)$

有　　$e^{\frac{x}{p}}\to e^{0}=1$

从而　$\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)\to 1$　　$\frac{1}{2}\Pi(x)\to\frac{\pi}{4}$

那么　$\Pi(x)\to\frac{\pi}{2}$

就是　$\omega\to\frac{\pi}{2}$

这样就与欧氏几何达到了一致。

另一方面，我们知道在$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)=e^{\frac{x}{\rho}}$中，$x$与曲率半径是相互联系着的，随着指针$x$变小，$\rho$就相应地变大。反过来也是如此。

当　$\rho\to\infty$时，当然$x\to 0$，$\frac{x}{\rho}\to 0$，$e^{\frac{x}{\rho}}\to 1$，

$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\Pi(x)\to\frac{\pi}{4}$，　$\omega=\Pi(x)\to\frac{\pi}{2}$。

同样说明了在微小区域里，罗氏几何可转化为欧氏几何。

9 罗巴切夫斯基几何与现实空间——天文测量的一个例子

通过前面一系列的探讨，我们深信罗巴切夫斯基几何与欧几里得几何同样是合乎逻辑而且是真实的。但是又引起一个问题：在现实空间里，我们应当使用哪一种几何呢？换句话说，现实空间里所实现的几何究竟属于哪一种呢？

我们知道罗氏三角形是有角亏$\delta=\pi-(A+B+C)$的，因此我们容易想到，只要在现实空间里检查三角形是否有角亏就行了。如果有角亏，那么现实空间就是罗氏空间；如果没有角亏($\delta=0$)，那么现实空间当然是欧氏空间了。但是当你去检查角亏时，如果角亏是十分微小的，甚至微小到比我们现有的最精密的仪器的误差范围还要小，我们就无法确定是否有角亏，从而也就无法判断现实空间是罗氏的还是欧氏的了。在这种情况下，我们可债作出两种不同的结论：(1) 或者在现实空间里，三角形根本没有角亏，因而使用任何精密的仪器也检查不出来；(2) 或者说，目前无法检查，等到有更精密的仪器后再去检查吧！可能以后还会出现角亏的。为了避免这样不明确的回答，我们就要选择一个非常巨大的三角形作为检查对象。根据三角

形的面积公式$S=\rho^2\cdot\delta$得$\delta=S/\rho^2$ 如果在地面上找三点作三角形的顶点，这样的三角形是不够大的，我们应当在天体范围内找一个人类能观测到的巨大三角形作为观测的对象。

现在的问题是：要选取多大的曲率半径c，才能使我们用罗巴切夫斯基公式所测得的结果与用欧氏公式所测得的结果相同。

我们设计把星的最大一年视差（从这星望见地球轨道直径的最大角度）的数值列入这些实验内。就是说，要多大的曲率半径c，才能使依据罗巴切夫斯基几何计算星的一年视差值，要合于众所周知的依据欧氏几何计算的视差值。

设d是地球轨道的直径AB，S是恒星，经过半年后，由轨道的一端转到另一端，而且使$\angle SAB$是直角。

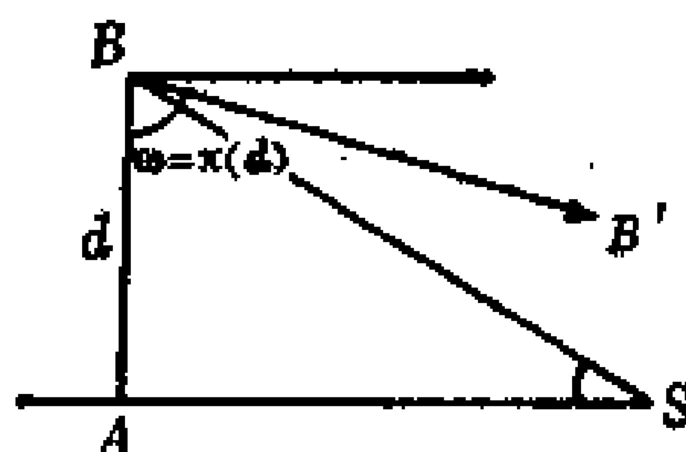


图 73

从B引射线$BB'/\!/AS$，使得

$$\omega=\Pi(d)>\angle ABS$$

根据假定 $\angle ABS+\angle ASB=\frac{\pi}{2}$

所以 $\omega=\Pi(d)>\frac{\pi}{2}-\angle ASB$

其次，因为$\angle ASB$小于星的最大一年视差，设 $\angle ASB=2p$，就有

$$\Pi(d)>\frac{\pi}{2}-2p,\quad \frac{1}{2}\Pi(d)>\frac{\pi}{4}-p$$

应用罗巴切夫斯基公式：

$$\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\Pi(d)=e^{\frac{d}{p}}$$

所以 $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\Pi(d)<\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-p\right)=\frac{1+\mathrm{tg}p}{1-\mathrm{tg}p}$

于是 $e^{\frac{d}{p}}<\frac{1+\mathrm{tg}p}{1-\mathrm{tg}p}$

故 $\frac{\delta}{\rho}<\mathrm{tn}\frac{1+\mathrm{tg}p}{1-\mathrm{tg}p}$

考虑由 $\mathrm{tn}(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5\cdots$

$$\mathrm{tn}(1-x)=-x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\cdots$$

得 $\mathrm{tn}\frac{1+x}{1-x}=\mathrm{tn}(1+x)-\mathrm{tn}(1-x)$

$$=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$$

用$\mathrm{tg}p$代换x，得到

$$\frac{d}{\rho}<\mathrm{tn}\frac{1+\mathrm{tg}p}{1-\mathrm{tg}p}=2\left(\mathrm{tg}p+\frac{1}{3}\mathrm{tg}^3p+\frac{1}{5}\mathrm{tg}^5p+\cdots\right)$$

$$<2\mathrm{tg}p(1+\mathrm{tg}^2p+\mathrm{tg}^4p+\cdots)$$

$$=2\mathrm{tg}p\cdot\frac{1}{1-\mathrm{tg}^2p}$$

$$=\frac{2\mathrm{tg}p}{1-\mathrm{tg}^2p}$$

$$=\mathrm{tg}2p$$

因此 $\rho>\frac{d}{\mathrm{tg}2p}$

从天文观察关于视差 $2p<1''$

所以 $\rho > \frac{1}{\mathrm{tg}1''} \cdot d > 200000d$

这个式子说明，曲率半径 ρ 必须大于地球轨道直径的20万倍，才能使应用罗巴切夫斯基几何与使用欧氏几何所计算的视差一致，即都得到同一的结果，视差 $2p$ 都小于 $1''$。

虽然取了地球轨道直径的20万倍这样大的数做曲率半径，但是对于宇宙空间来说仍然是十分微小的。由此可见，我们所能见到的范围是多么地有限，而罗氏几何所适应的空间，又是多么的广阔啊！

根据推算出来的空间曲率半径 ρ 的大小，以地球轨道半径为一腰的等腰直角三角形，可以说是巨大的三角形了，但是通过计算，它的角亏 δ 还不到0.000003″，这样微小的角亏，在现代的精密仪器下，是不能检查出来的。所以说，现有的观测技术及仪器，还不能使我们来推断现实空间形式。但自从"相对论"学说创立后，对这个问题的答案，提供了可能性。当然，还有很多工作需要我们去做。现实空间的几何是与充满宇宙之间互相吸引的物质分布的密度与运动有密切关系的。它不可能是排除一切外来因素，象欧几里得那样"纯粹"的几何，甚至是比罗巴切夫斯基几何还要复杂得多的几何空间。如果我们去研究一下"相对论"原理，将会得到很大的启发，使我们的思维范畴和空间想象进入更新更深入的领域中去。

10

关于黎曼几何的模型解释

我们知道欧氏几何与罗氏几何的主要分岐点在于平行公理的截然相反。现在把它并列起来比较一下：

欧氏平行公理："在平面内，过已知直线外的一个已知点，最多只能作一条直线与已知直线平行(不相交)"。

罗氏平行公理："在平面内，过已知直线外的一个已知点，最少可以作两条直线与已知直线不相交。"并进一步指出有无数条超平行线都与已知直线不相交。

经过比较，我们很自然地会问：是否有这样的几何，在平面内，过直线外的一个已知点与已知直线不相交的直线一条也没有呢？这种"最多一条"，"最少一条"，"一条也没有"的联想，必然会在人们的脑子里反映出来。

另一种联想是：在欧氏几何里，三角形的内角和等于二直角；在罗氏几何里三角形内角和小于二直角；是否有一种几何，它的三角形内角和大于二直角呢？

历史的发展回答了这个问题。

当罗巴切夫斯基发表罗氏平行公理的论文28年后，德国数学家倍耳哈特·黎曼(Bernhard Riemann1826—1866)在1854年发表了既不属于欧氏也不属于罗氏，而是自成体系的"黎曼

几何"。

黎氏平行公理："任何两条直线必有唯一的交点。"

同时，黎氏几何中还指出：任何直线虽然可以任意伸长，但长度是有限的。

这个事实可以用一个欧氏的球面略加改造，作为黎氏几何的模型来作解释。

下面是黎氏几何模型的规定：

规定1 在欧氏空间中任取一个球面K，约定把球面上的对径点（球直径的两端点）"统一起来"，看作一个对象，这个对象便叫做黎曼几何的"点"。

规定2 球面K上的大圆叫做"黎氏直线"，大圆上的对径点仍看作一个点。

规定3 对径点统一起来的球面K，叫做"黎氏平面。"

规定4 所谓黎氏点和黎氏直线的结合关系，就是球面K上的点与球面K上的大圆弧的普通结合关系。

由于在球面K上，任何两个大圆必相交于两个点，而这两个点恰好是对径点，把它看成一个点，所以说黎氏平而上任何两条直线必相交于一个点，这样就实现了黎氏平行公理。

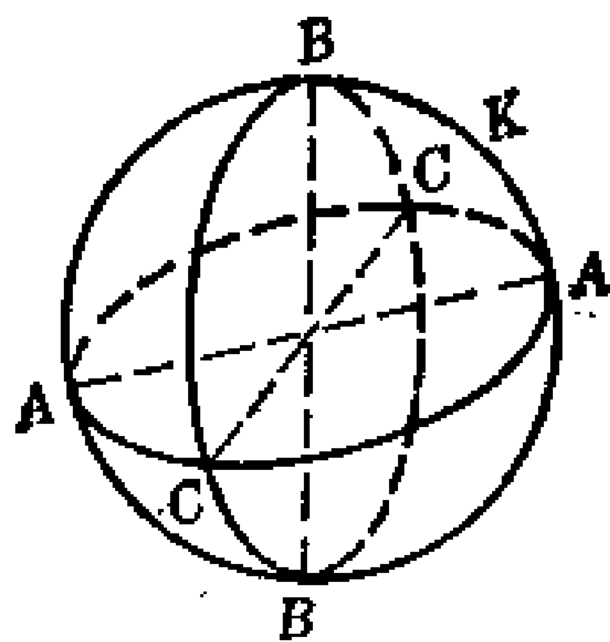


图 74

另一方面，大圆上任一点，可沿大圆弧任意移动，但大圆的长度是有限的，所以说黎氏直线可以任意伸长，但是有一定的长度。

应当注意，关于点的顺序公理，必须要有所规定。因为大圆弧上的A、B、C三点，B可以在A、C、之间；C可以在B、A之间；A可以在C、B之间。因此必须要用四个点，才能说明顺序关系。分两种情况说明：

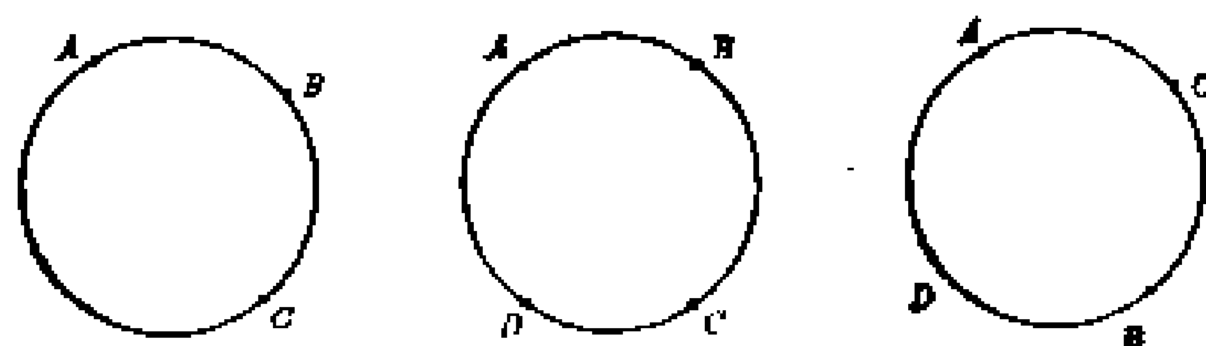


图 75

1° 点对A、B分离点对C、D。意思是说，点C沿着直线移动，使之与D重合，则必须在某个时候，C与A或B重合；要使A与B重合也一样，即A必先与C或D重合。

2° 点对A、R不分离点对C、D。这时，可以移动点C，使之与D重合，但不必通过A或B；同时也可以移动点A使与B重合，而不通过C和D。

所以必须要四个点，才能说明顺序关系。直线的分离关系也是一样。

从球面几何知识：任意三条大圆弧圆成的球面部分，称为球面三角形（如面ABC）。它的内角和是大于二直角的。这就证实了黎氏平面上三角形内角和大于二直角。

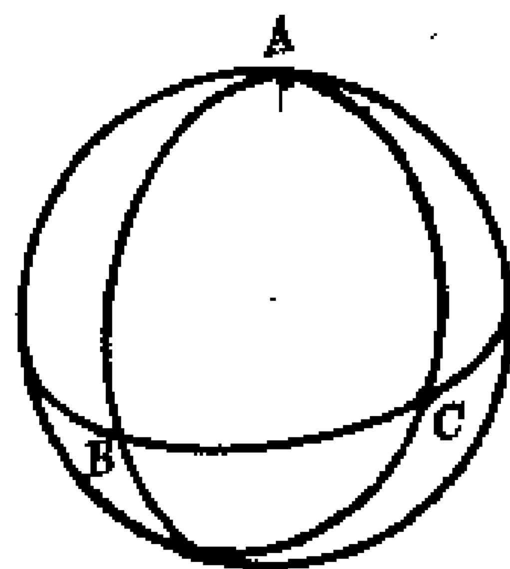


图 76

我们又知道在罗巴切夫斯基平面内，三角形的面积

$$S=\rho^2[\pi-(A+B+C)]\text{或}S=\rho^2\cdot\delta$$

（这里ρ是罗氏曲率半径，$\delta=\pi-(A+B+C)$是角亏）

如果用 Ri换替上式中的ρ，$(i=\sqrt{-1})$

那么 $S=\rho^2\delta$

$$=(Ri)^2[\pi-(A+B+C)]$$

$$=-R^2[\pi-(A+B+C)]$$

$$=R^2[(A+B+C)-\pi]=R^2\lambda\ (\lambda\text{是角余})$$

所以，在罗氏几何中，如果把曲率半径ρ换成Ri的话，就得到黎氏几何中的面积公式。这个变换不仅是十分有趣的，而且也说明了罗氏几何和黎氏几何之间的一种关系，给我们研究黎氏几何开辟了一条新的途径。

在这里，还要指出一个十分有趣的性质：任意一条直线不能把黎曼平面分成两个不同的区域。例如大圆a，初看似乎把球面K分成Ⅰ、Ⅱ两部分了，似乎A点落在Ⅰ域。但不要忘记，我们是规定把A的对径点A_1看成同一个点的。而这时的A_1是在Ⅱ区域，即A点是区域Ⅰ的点，也是区域Ⅱ的点。因此，直线a并没有把黎曼平面分成两个不同的区域。

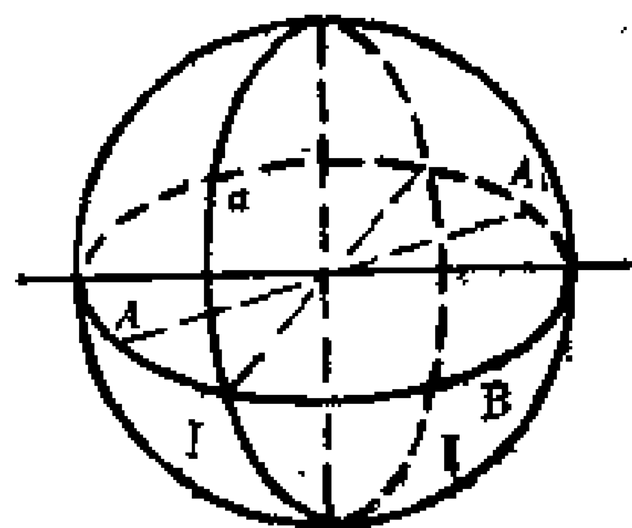


图 77

同时，我们也看到，Ⅰ、Ⅱ两部分的点A和B，可以用不与a相交的直线段连结起来，因为A的对径点A_1就是A点。很明显，直线段A_1B是不与直线a相交的。

黎曼平面的这种特殊性质，用拓扑学上的名词来说，称为单侧性。在本书一开始时，提出的梅比乌斯带子也是具有单侧性的。

关于黎曼几何的知识，由于我们受到一些预备知识的限制，这里只能粗略地谈一些易于接受的内容。读者如果还想进一步探讨，可参阅钱端壮编著的《几何基础》第六章《黎曼几何学》。

11

曲面的几何学——欧氏几何与非欧几何的统一

前面我们谈到了三种派别的几何学：欧氏几何学，罗氏几何学和黎氏几何学.我们都可以把它归并在曲面的几何学里面，并且把它们统一起来。

在三度空间里的曲面几何学，是初等微分几何里最有趣的部分。现在先向读者作一概略的介绍，接着再谈谈高斯曲率，然后再看看它们是怎样统一起来的。(欲知其详,可参阅秦元勋著《几何学通论》)

1.曲面上的距离与角

假设有一个曲面S，S上任取二点P和Q，由P在S上走到Q的路径有无穷多，但在一般情况下，最短的路径只有一条，叫做由P至Q的测地线（又叫短程线）。例如我们大家都知道，球面上的测地线是过P、Q两点的大圆劣弧。

在S上任取两条曲线C_1、C_2，假设P点是C_1和C_2的交点，过P点作C_1及C_2的切线，这两条切线所成的角，就称为曲线C_1和C_2在交点P的夹角。

2.高斯曲率

在一曲面S上任取一点P，过P任取S上的一曲线C，作C在P点的切线。这种曲线C不只一条，这种切线也不只一条，这些切线的全体组成一张过P点的平面(π)，称为曲面S在P点的切平面。

过P点作一直线垂直于平面(π)，这条直线称为曲面S在P点的法线，法线在曲面S异侧的指向为正方向。〔如图78(1)所示〕

在空间取一个球心为O、半径为1的球面S'，由球心作一半径平行于法线的正方向，以P'记这半径的端点，P'称为曲面S上的P点在球面S'上的代表点。S上任一点在S'上一定有一个代表点，也只有一个代表点；反之，S'上的每一个点不一定都代表S上的一点，可以代表很多的点，也可以不代表S上的任一点。

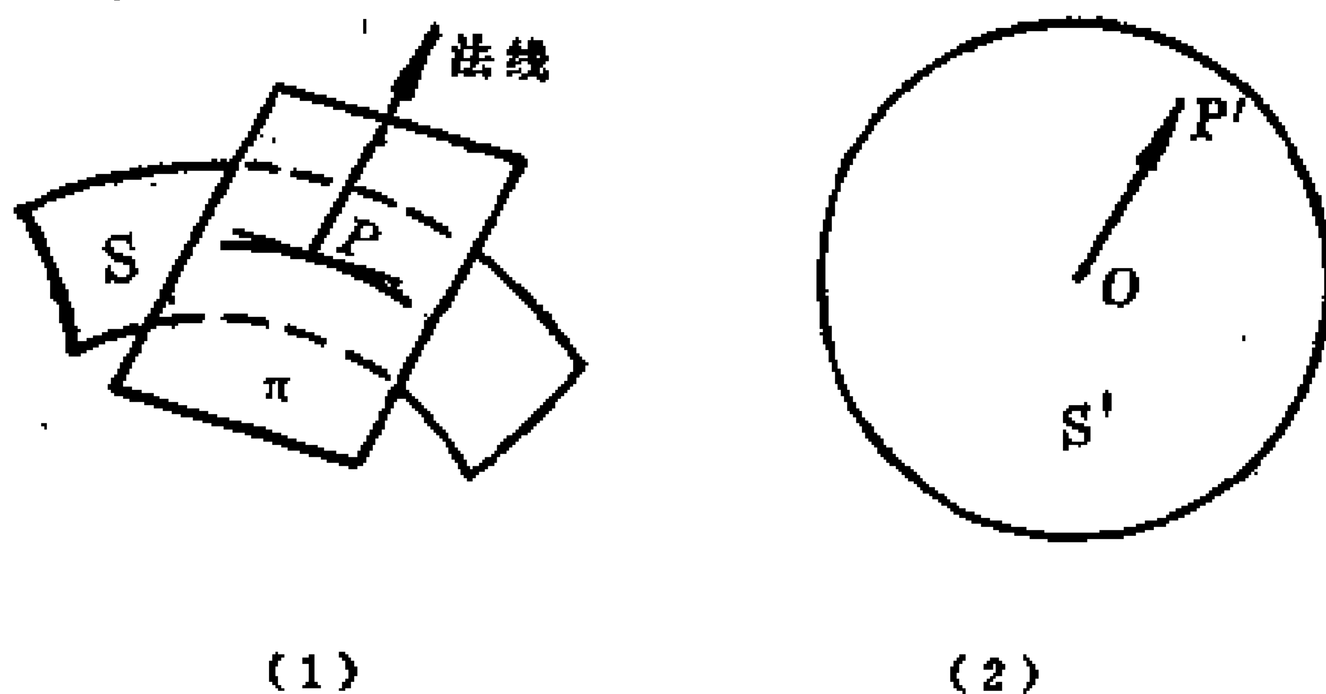


图 78

在S上P点的周围任画一小圈C，把P包含在内。C上各点的代表点在S'上也组成一个小圈C'，把P'包含在内。C所包

围的S上的面积以A记之，C'所包围的S'上的面积以A'记之，A及A'有同方向与反方向的区别，其决定法如下：

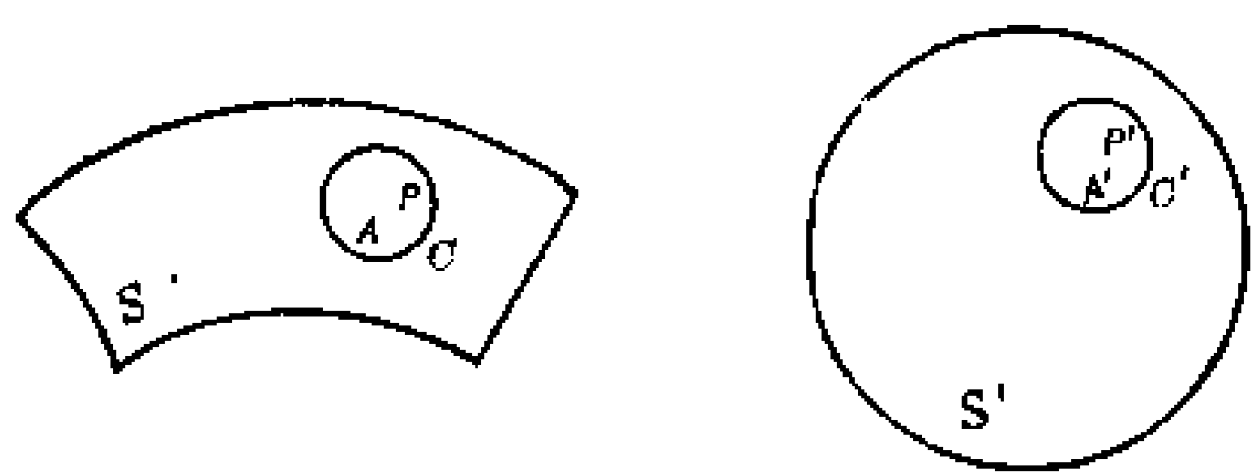


图 78

设有甲、乙两人，甲在S上，由脚至头的方向，总是甲所在点的法线的正方向；乙在S'上，乙由脚至头的方向，总是乙所在点的法线的正方向。甲在C上走，乙在C'上走，甲绕C一周，乙绕C'一周；当甲绕C时，C的内部始终在甲的左边或始终在甲的右边，C'的内部也始终在乙的一边。如果C的内部在甲的左边，同时C'的内部也在乙的左边，或C的内部在甲的右边，同时C'的内部也在乙的右边，我们就说A和A'有同方向，$\frac{A'}{A}$便是正数。反之，如果C的内部在甲的左边，同时，C'的内部在乙的右边，或C的内部在甲的右边，同时C'的内部在乙的左边，我们说A和A'有反方向，$\frac{A'}{A}$便是负数。

现在让C在S上收缩到P点，C所包的面积便收缩到零，C'在S'上也收缩到P'点，C'所包的面积A'也收缩到零。$\frac{A'}{A}$便变到一个数目，这个数目叫做曲面S在P点的高斯曲率，又叫总曲率。

下面是两个例子：

例 1　假设S是一张平面，S上任一点的切平面便是S自己，S上任一点的法线，便是S上该点的垂线．一张平面的垂线，都是互相平行的，所以S上所有的点在S'上的代表点都是同一点，因此C'便只是一点，C'所包的面积是零，即A'等于零．

所以$\frac{A'}{A}$总等于零。

结论：一张平面上的每点的高斯曲率都是零。

例 2　设S是半径等于r的球，把S的球心O和S'的球心O'重合，S上任一点P，对应S'上的点P'，则OP和OO'实际上是重合在一起的．如果$r>1$，P'便在OP线段内；如果$r=1$，P便与P'重合；如果$r<1$，P便在OP'线段内．用简单的比喻，设想球心O是一个太阳，向四面八方发光，S上一点P在S'上的影子便是点P'，C'便是S上的C在S'上的影子，A'便是A的影子，所以A'和A之比等于S'和S的半径的平方之比，即

$A':A=1:r^2$。

结论：半径为r的球面上，每一点的高斯曲率都是$\frac{1}{r^2}$。

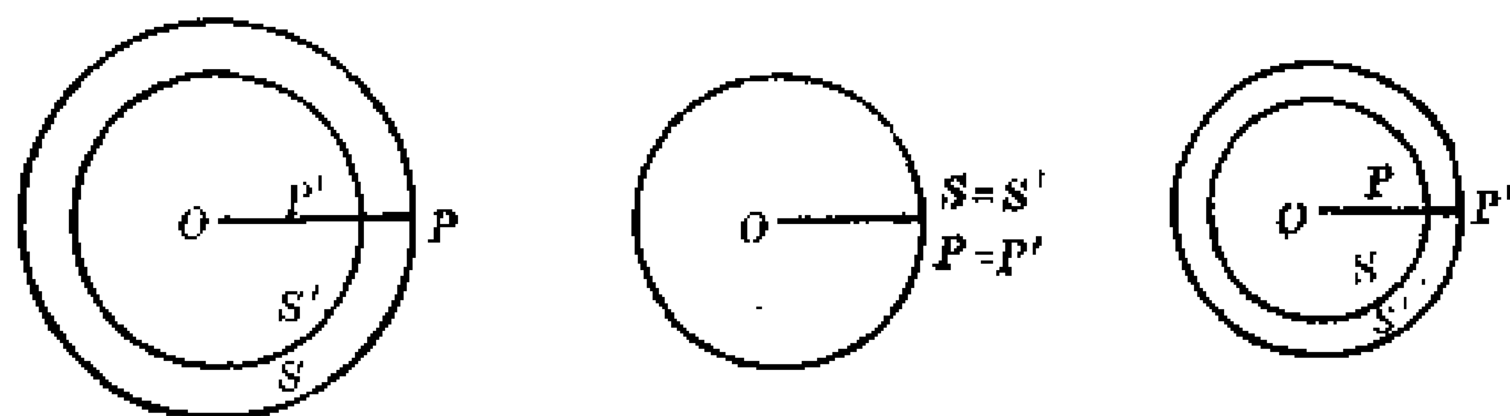


图　80

一般地说，如果一个曲面S在每一点的曲率都等于K（K是一已知实数），则S称为定曲率曲面。例1中S的K等于数O；例2中S的K是一个大于零的数$\frac{1}{r^2}$.自然我们也想看一看曲率小于零的定曲率曲面是什么样子.

假设一个人追一只狗，开始时，人在距离为r的狗北面，狗向东边跑，人为了追上狗，无论任何时候都是面对着狗，狗的位置时时在移动，人走的方向也时时在变. 狗为了不被人追上，在任何时候都设法与人保持r的距离。这样穷追下去，狗向东跑，所以狗是在一直线上跑，人跑的路线叫定切曲线，也不妨叫追狗曲线。自然，由开始之点，狗也可以向西跑，人也跟着追逐，得到追狗曲线的另一半。（见图81）

以狗跑的直线为轴，旋转一周，便得到一个曲面，叫做伪球。（见图82）

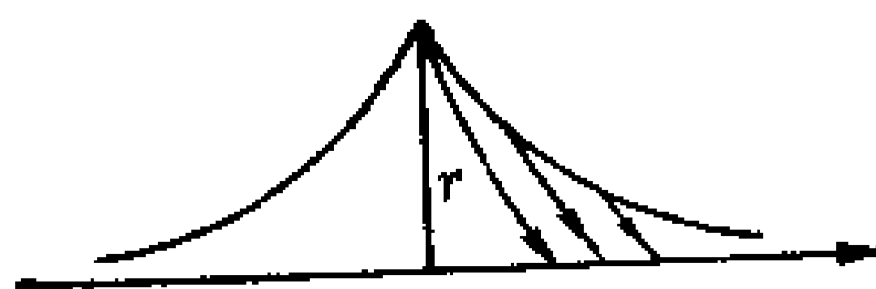


图 81

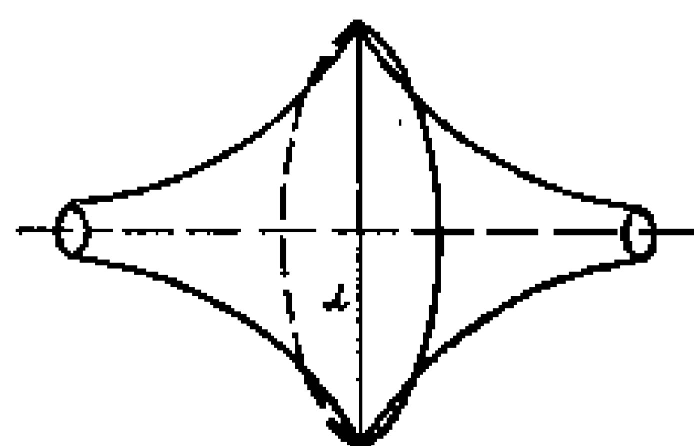


图 82

伪球的特点是：每一点的高斯曲率都等于$-\frac{1}{r^2}$.

3.欧氏几何与非欧几何的统一

高斯证明了一个非常有趣的定理：若假设一曲面S上每一点的高斯曲率都等于一个定数K（K可以大于零、等于零或小于零），在S上任作一个测地三角形（由短程线所围成的三角形），

则这个测地三角形的三个内角之和大于、等于或小于两直角，由K大于、等于或小于零而定。

用E表示测地三角形的面积（由曲面上短程线所围成的三角形面积），它的三内角为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$，则有$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi+KE$（证明见苏步青等著《微分几何》第二章§6.7 Gauss—Bonnot公式）

$$即\quad E=\frac{1}{K}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi)$$

即K大于零时，E与角余成正比；K小于零时，E与角亏成正比。

结论：在定曲率曲面S上的几何学由K而定。

K大于零，所得的几何是是黎氏几何学；

K等于零，所得的几何学是欧氏几何学；

K小于零，所得的几何学是罗氏几何学。

三种不同的几何学，在高斯曲率的观点下统一成一种几何学的三种不同情形。

12
射影几何观点下的非欧几何与欧氏几何的统一

为了更进一步地研究非欧几何与欧氏几何的关系，我们首先要学一点射影几何知识。

(1) 四点A_1、B_1、C_1、D_1的交比

在l_1及l_2上各任取一方向为正方向，在l_1上任取不同的四点A_1、B_1、C_1、D_1，在平面上取定一点P，直线PA_1与l_2的交点为A_2，A_2称为A_1在l_2上的对应点。同样，B_2、C_2、D_2、是B_1、C_1、D_1、在l_2上的对应点。以$\overline{A_1B_1}$表示A_1至B_1的长度，以$\overline{A_2B_2}$表示A_2至B_2的长度，很明显$\overline{A_1B_1}$和$\overline{A_2B_2}$不一定会相等。

对于l_1上四点A_1、B_1、C_1、D_1，用(A_1B_1, C_1D_1)记

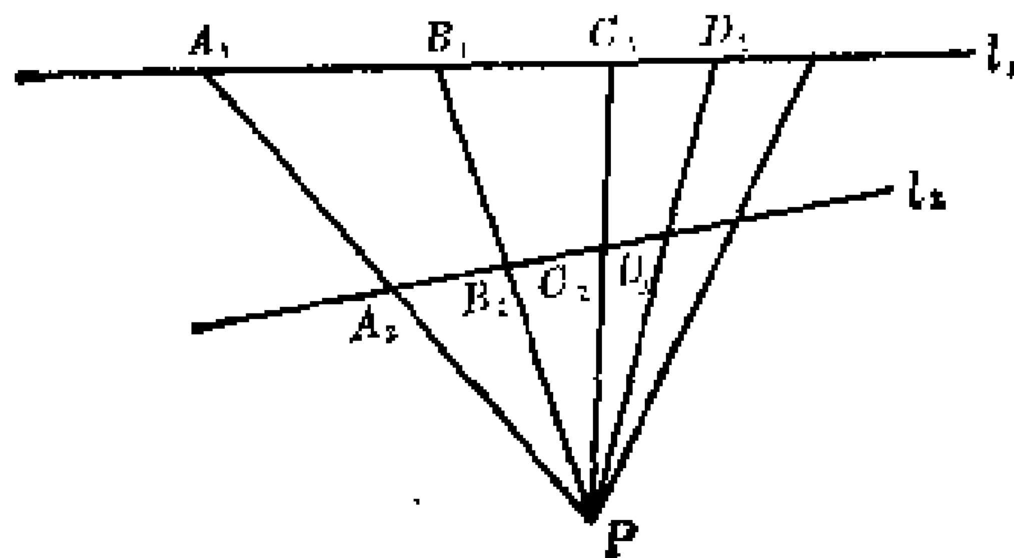


图 83

$$\frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{A_1D_1}} \div \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{B_1D_1}}$$

(A_2B_2, C_2D_2) 记

$$\frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2D_2}} \div \frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_2D_2}}$$

作为特例，如果 $l_1 \parallel l_2$，就有

$$\frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{PA_1}{PA_2}, \quad \frac{A_2D_2}{A_1D_1} = \frac{PA_2}{PA_1}$$

上两式相乘得 $\dfrac{A_1C_1}{A_1D_1} \times \dfrac{A_2D_2}{A_2C_2} = 1$

又 $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} = \dfrac{PB_1}{PB_2}, \quad \dfrac{B_2D_2}{B_1D_1} = \dfrac{PB_2}{PB_1}$

上两式相乘得 $\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} \times \dfrac{B_2D_2}{B_1D_1} = 1$

因此有 $\dfrac{A_1C_1}{A_1D_1} \cdot \dfrac{A_2D_2}{A_2C_2} = \dfrac{B_1C_1}{B_2C_2} \cdot \dfrac{B_2D_2}{B_1D_1}$

即得 $\dfrac{A_1C_1}{B_1C_1} \div \dfrac{B_1C_1}{B_1D_1} = \dfrac{A_2C_2}{A_2D_2} \div \dfrac{B_2C_2}{B_2D_2}$

就是 $(A_1B_1, C_1D_1) = (A_2B_2, C_2D_2)$

作为一般情形，l_1不平行于l_2.（请参阅《高等几何》叶非莫夫著 第五章§114）

不管A_1、B_1、C_1、D_1如何取法，总有：

$$(A_1B_1, C_1D_1) = (A_2B_2, C_2D_2)$$

这里的(A_1B_1, C_1D_1)称为A_1、B_1、C_1、D_1四点的交比。

(2) 四直线a_1、b_1、c_1、d_1的交比。

在L_1及L_2周围各取一方向为正方向。过 L_1 任取不同的二直线a_1、b_1，过L_2的对应直线为a_2、b_2，以$\widehat{a_1 b_1}$表示a_1转至b_1的角度，$\widehat{a_2 b_2}$表示a_2转至b_2的 角度。很明显$\widehat{a_1 b_1}$ 和$\widehat{a_2 b_2}$不 一定全相等。

如果我们任取过L_1的四直线a_1、b_1、c_1、d_1，用$(a_1,b_1c_1d_1)$记

$$\frac{\text{sim}\widehat{a_1 c_1}}{\text{sim}\widehat{a_1 d_1}} \div \frac{\text{sin}\widehat{b_1 c_1}}{\text{si n}\widehat{b_1 d_1}}$$

a_1、b_1、c_1、d_1、的对应直线依次是过L_2的a_2、b_2、c_2、d_2，同样用(a_2b_2,c_2d_2)记

$$\frac{\text{s in}\widehat{a_2 c_2}}{\text{si n}\widehat{a_2 d_2}} \div \frac{\text{s in}\widehat{b_2 c_2}}{\text{sin}\widehat{b_2 d_2}}$$

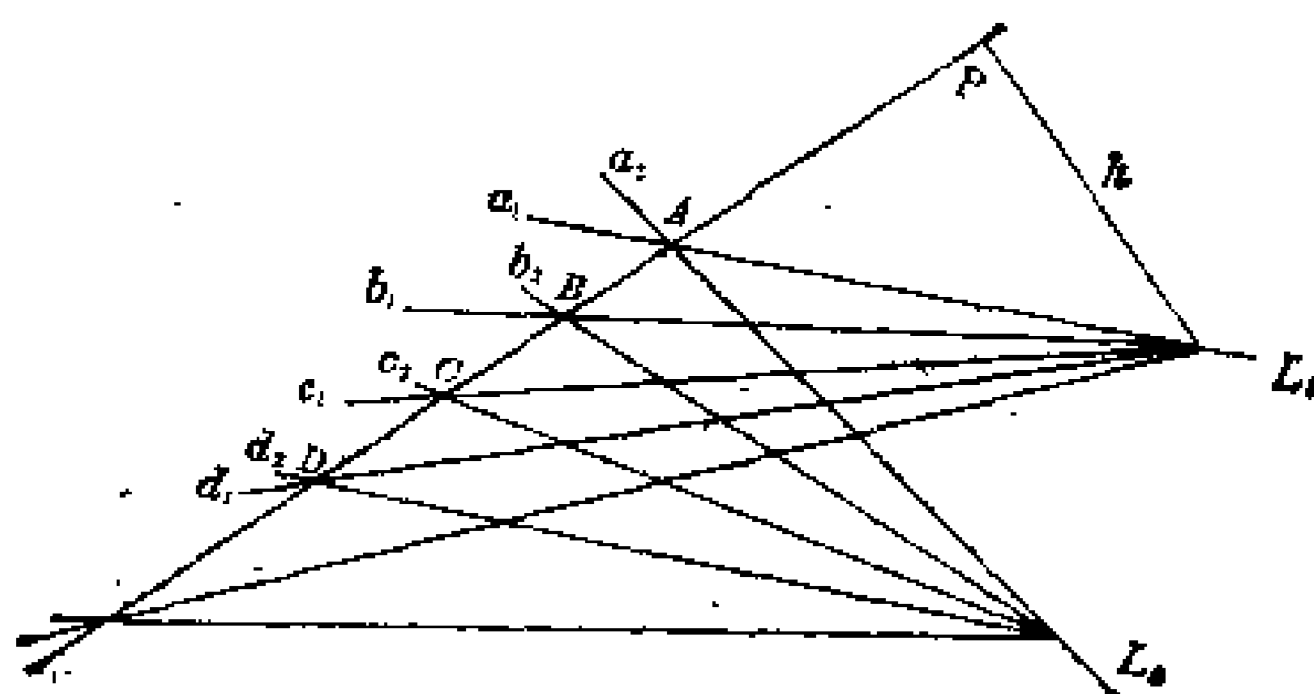


图 34

不管a_1、b_1、c_1、d_1、如何取法，总有：

$$(a_1b_1,c_1d_1)=(a_2b_2,c_2d_2)$$

可以用初等方法证明如下：

$$\triangle L_1AC\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h$$

$$=\frac{1}{2}\cdot L_1A\cdot L_1C\operatorname{Sin}\widehat{a_1c_1}$$

$$\triangle L_1AD\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot h$$

$$=\frac{1}{2}\cdot L_1A\cdot L_1D\operatorname{Sin}\widehat{a_1d_1}$$

$$\therefore\quad \frac{AC}{AD}=\frac{L_1C}{L_1D}\cdot\frac{\sin\widehat{a_1c_1}}{\sin\widehat{a_1d_1}}$$

$$\triangle L_1BC\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot h=\frac{1}{2}\cdot L_1B\cdot L_1C\operatorname{Sin}\widehat{b_1c_1}$$

$$\triangle L_1BD\text{的面积}=\frac{1}{2}\cdot L_1B\cdot L_1D\operatorname{Sin}\widehat{b_1d_1}$$

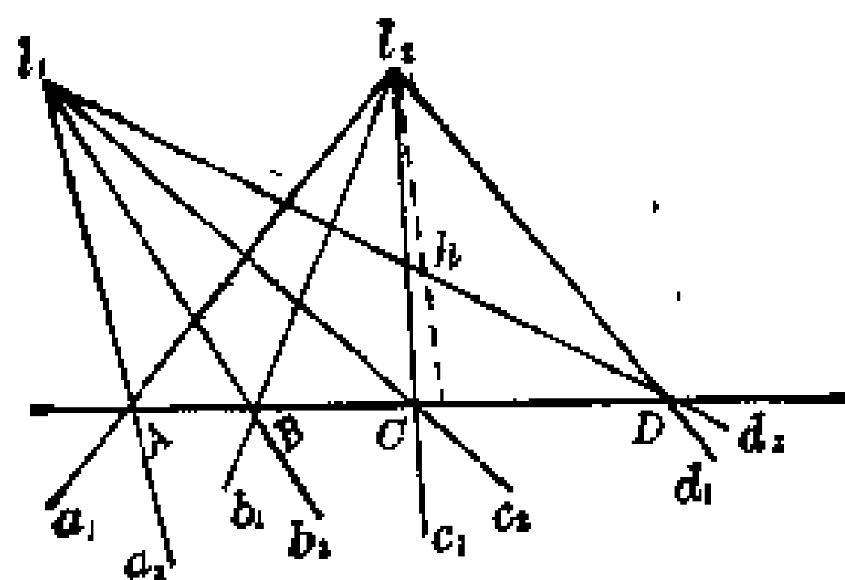


图 85

$$\therefore \quad \frac{BC}{BD}=\frac{L_1C}{L_1D}\cdot\frac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{b_1d_1}}$$

$$\therefore \frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{\sin\widehat{a_1c_1}}{\sin\widehat{a_1d_1}}:\frac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{b_1d_1}}$$

同样 $$\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}=\frac{\sin\widehat{a_2c_2}}{\sin\widehat{a_2d_2}}:\frac{\sin\widehat{b_2c_2}}{\sin\widehat{b_2d_2}}$$

从而 $$\frac{\mathrm{Sin}\widehat{a_1c_1}}{\mathrm{Sin}\widehat{a_1d_1}}:\frac{\sin\widehat{b_1c_1}}{\sin\widehat{b_1d_1}}=\frac{\sin\widehat{a_2c_2}}{\sin\widehat{a_2d_2}}:\frac{\sin\widehat{b_2c_2}}{\sin\widehat{b_2d_2}}$$

这里(a_1b_1,c_1d_1)称为a_1、b_1、c_1、d_1四直线的交比。

交比在射影几何学里的地位正如距离在欧氏几何学里的地位一样重要。因为它建立了度量关系。下面我们在非欧几何学里，就要应用交比来定义线段的长度和角的大小。

现在我们可以用射影几何的观点去看非欧几何与欧氏几何的关系了。

1.罗氏几何

在平面（π）上任取一点O，以O为圆心、大于零的实数r为半径作圆c，在c内任取两点P、Q，过P、Q作直线l与圆c交于两点R_1、R_2。假设l上的正方向是由R_1到R_2的。

设 $(PQ,R_1R_2)=\frac{\overline{PR_1}}{\overline{PR_2}}\div\frac{\overline{QR_1}}{\overline{QR_2}}$

设 $d(PQ)=\frac{r}{2}\ln(PQ,R_1R_2)$ 这里$d(PQ)$表示P、Q两点

的罗氏距离。(参阅《高等几何》叶非莫夫著光明译(高等教育出版社出版 §169 第460页)

同前面第十一节所述的贝氏图一样，容易检验$d(PQ)$有下面的性质：

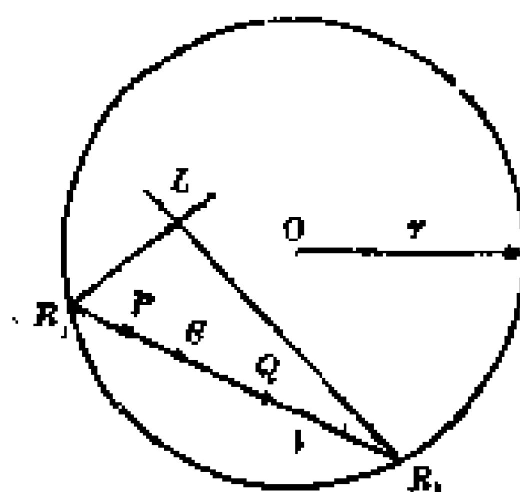


图 86

(1) $d(PQ)=-d(QP)$

(2)假设s在PQ线段上，则

$$d(PQ)=d(PS)+d(SQ)\ (\text{可加性})$$

(3)假设P与Q重合，则$d(PQ)=0$。反之，假设$d(PQ)=0$ 则P与Q重合。

(4)假设P点而定，Q点沿l移到R_1或R_2时，$d(PQ)$变成无限大。

现在我们不妨有这样的一种设想：有人居住在圆c内，并且设想圆c内各点的温度不均匀（或者质量分布不均匀），由于热胀冷缩的影响，使得这人用来测量距离的尺子本身长度在各点都不相同。可是这人自已的身长也同样受到热胀冷缩的影响，与他所用的尺子成正比地胀长缩短。因此，当这人带了尺子在圆内作测量时，他既不能发觉他的尺子在胀缩，也不能发觉他自已的身体在胀缩。我们要说明，这种设想，不是完全的幻想。因为在宇宙空间存在着各个星体之间的引力，各种相对运动的速度，各种星体的分布等都不是均匀的分布，以及宇宙射线和其他我们还没有发现的各种因素等等。它的结构决不是空洞无物的那种“纯粹”的宇宙，这里仅仅是用温度来作为例子而已。

由于人的尺子的本身长度随地而异，他由圆内的一点P量到圆内的另一点Q所得到的结果，便和我们局外人用长度不会变的尺子由P量到Q所得的结果不同了。我们量得的结果即是平日我们所常说的那样PQ之长，这人所量的结果，假设为$d(PQ)$，我们注意看他们量法得到些什么：

1° $d(PQ)=-d(QP)$，表示从P到Q与从Q到P所量的结果是长短相等，方向相反。

2° S在PQ上，则有 $d(PQ)=d(PS)+d(SQ)$。这表示从P量到Q之长等于从P量到S之长加上从S量到Q之长。

3° P与Q重合，则 $d(PQ)=0$，$d(PQ)=0$，则P与Q重合。这表示：如果两点重合，则其距离为零。反之，两点的距离为零，则此两点重合。

这人所量得的上面的三种结果，与我们局外人所用的不会变的尺子所量的结果相同，但是下面的第4点却不相同了。

4°如果Q沿l跑到R_1或R_2时，$d(PQ)$变成无限大，所以这人觉得R_1和R_2是l上的两个无穷远点，他永远走不到R_1和R_2。可是我们局外人看来，PR_1和PR_2都是有限长度。

这一小点的差异，使得这人所量得的几何属于罗氏范畴。

在圆c内任取不在l上的一点L，联结LR_1及LR_2两直线，因为R_1及R_2是在无穷远处，所以LR_1和LR_2都是l的平行线，于是过L可以作l的两条平行线了，它实现了罗氏平行公理。

在圆c上任取一点T，由T作二条线段p、q，以$\widehat{pq}$记p与q在T点所成的角。我们知道过一点向圆引切线时，有三种情况：点在圆外，可以引两条切线；点在圆上，只可引一条切

线，点在圆内，不能引切线。为了统一起见，可引两条虚切线，用虚线表示 r_1，r_2。正如我们在解析几何中所学的圆的方程 $x_2+y^2=k$。当 $k>0$ 时，半径 $R=\pm\sqrt{k}$ 表示一般的圆，当 $k=0$ 时，半径 $R=0$ 表示点圆；当 $k<0$ 时，半径 $R=\pm\sqrt{k}\,l$ 表示虚圆。

设 $(pq,r_1r_2)=\dfrac{\sin\widehat{pr_1}}{\sin\widehat{pr_2}}\div\dfrac{\sin\widehat{qr_1}}{\sin\widehat{qr_2}}$

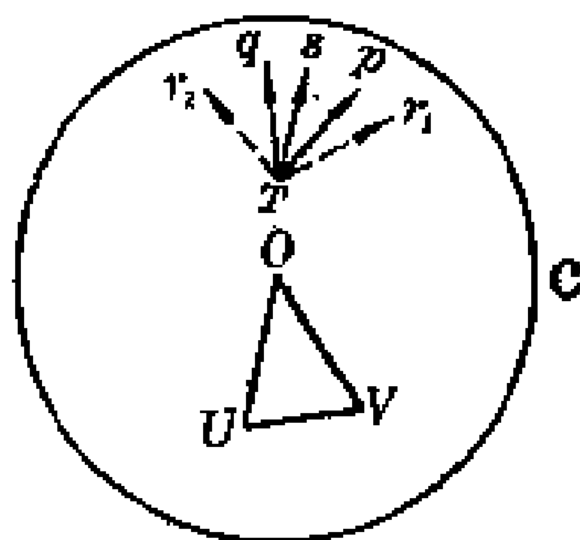


图 87

用 $\theta(pq)$ 表示这种几何中 p 与 q 的夹角，

$$\theta(pq)=\frac{i}{2}\ln(pq,r_1r_2)$$

同前面的方法一样，检验 $\theta(qp)$ 有下面四个性质：

1° $\theta(pq)=-\theta(pq)$

2° 设 s 为过 T 点的一直线，s 在 p、q 之间，则

$$\theta(pq)=\theta(ps)+\theta(sq)。$$

3° 设 p 与 q 重合，则 $\theta(pq)=0$。反之设 $\theta(pq)=0$，则 p 与 q 重合。

4° 如 p、q 相交于圆心 O，则 $\theta(pq)=\widehat{pq}$；如 p、q 不相交于 O，则 $\theta(pq)$ 不一定等于 $\widehat{pq}$。

现在我们假定这人测出由 p 到 q 的角度是 $\theta(pq)$，他对于角度的测量有下面的结果：

1° $\theta(pq)=-\theta(qp)$，即由 p 到 q 的角度和由 q 到 p 的角度大小相等，方向相反。

2°　p、q、s 都交于 T，s 在 p、q 之间，则 $\theta(pq)=\theta(ps)+\theta(sq)$，即是由 p 到 q 的角度等于由 p 到 s 的角度加上由 s 到 q 的角度。

3°　设 p 与 q 重合，则 $\theta(pq)=0$　即表示由 p 到 q 的角度等于零。反之　$\theta(pq)=0$即由 p 到 q 的角为零，则 p 与 q 重合。

上面三点和我们对于角的测量度数所得的结果是一样的。下面的第 4 点却有了差异。

4°　如果这人在圆心 O点时，测量的度数，所得的结果与我们测得的结果相同，不在 O点时，与我们所得的结果便不一定相同了。

这人的几何学和我们的几何学有很多相同之处。譬如："一个三角形的三边相等，则三角形全等。"

假设这人在圆内作一个他所认为的"等边三角形" OUV，其中一个顶点 O在圆心上，虽然由我们看来OU，OV是一样长，但UV却要短些，这是因为离圆心远，这人的尺子变短了。所以在他看来UV和OU,OV一样长。因为$\triangle OUV$他认为是"等边三角形"，所以三内角和是相等的。他认为$\triangle OUV$ 三内角的和便等于三倍的 $\theta(uv)$。u，v各代表OU和OV二直线，但是根据上面的第 4 项，$\theta(uv)$ 等于$\overset{\frown}{uv}$，即是等于$\angle UOV$，和我们局外人的量数相同，所以他认为等边三角形三内角之和等于三倍的$\angle UOV$。

现在回到我们平常的欧氏几何学来。

因为$OV=OU>UV$

故有　$\angle UOV<\angle UVO=\angle VUO$

∴　$3\angle UOV<\angle UOV+\angle UVO+\angle VUO=$两直角

即是　$3\theta(UV)<$两直角

结论：在这人的几何学中，$\triangle OVU$的三内角之和小于两直角。这人的几何实在是罗氏几何学。

2.黎氏几何学

在平面(π)上取一圆心为O，半径为ir的虚圆c（r是不为零的实数）在(π)上任取二点P、Q，过P、Q作直线l与c交于二点R_1及R_2（都是虚点）

$$设\ (PQ,R_1R_2)=\frac{\overline{PR_1}}{\overline{PR_2}}\div\frac{\overline{QR_1}}{\overline{QR_2}}$$

$d(PQ)=\frac{ir}{2}\ln(PQ,R_1R_2)$（参见《高等几何》叶非莫夫著　裘光明译　§169　第462页）

$d(PQ)$有下面的性质：

1°　$d(PQ)=-d(QP)$

2°　如果S在PQ上，则$d(PQ)=d(PS)+d(SQ)$

3°　如果P与Q重合，则$d(PQ)=0$。如果$d(PQ)=0$，则P与Q重合。

4°　假设P固定，Q沿l跑到无限远点去，$d(PQ)$便等于$\frac{\pi r}{2}$或$-\frac{\pi r}{2}$，正负号由Q沿l的正方向或负方向跑去而定。

假设有一个人生存在这平面上，因这平面上各点的温度不同，他用来量距离的尺子的本身也受热胀冷缩的影响而变化。

假设他由P量到Q所得的结果是$d(PQ)$，它对于长度的测量也有四个结果。

第1°、2°、3°个结果和前款中相同，现在只有第4个结果有差异。

4° 由一点P量到任何一无限远点的距离都是一定长$\frac{\pi}{2}r$或$-\frac{\pi}{2}r$。正负号表示正负方向。所以这人在平面上，对于任何一直线都是有限长度，虽然可以沿一直线继续前进。这种人的直线便象是球面上的大圆一样，但由我们局外人看来由P点量到无限远点的距离是无限大的。

这一点的差异使得这人的几何属于黎氏范畴。

过(π)上一点T，作两条直线p、q，由T作c的两条切线r_1，r_2（都是虚线）。

设 $$(pq, r_1r_2) = \frac{\sin\widehat{pr_1}}{\sin\widehat{pr_2}} \div \frac{\sin\widehat{qr_1}}{\sin\widehat{qr_2}}$$

$$\theta(pq) = \frac{1}{2}\ln(pq, r_1r_2)$$

$\theta(pq)$有四个性质如前款中的$\theta(pq)$一样。假设这人测得角度的结果$\theta(pq)$，他也同样的有四项结果。

这种人的几何学中也有“三角形的三边相等则三个内角也相等。”

假设这人作他认为的“等边三角形”OUV，在我们局外人看来 $OU = OV$ 这点与这种人的看法相同。

由于离O愈远，这种人的尺子就愈短，但我们看起来要长

一些了。所以从我们看来有

$$OU = OV < UV$$

所以 $\angle OVU = \angle OUV < \angle UOV$

所以 $3\angle UOV > \angle OVU + \angle OUV + \angle UOV =$ 二直角。

但是 $3\angle UOV$ 等于这动物的"等边三角形" OUV 的三内角之和，于是得到下面的结论：

在这种人的几何学中，$\triangle OUV$ 的三内角之和大于二直角。

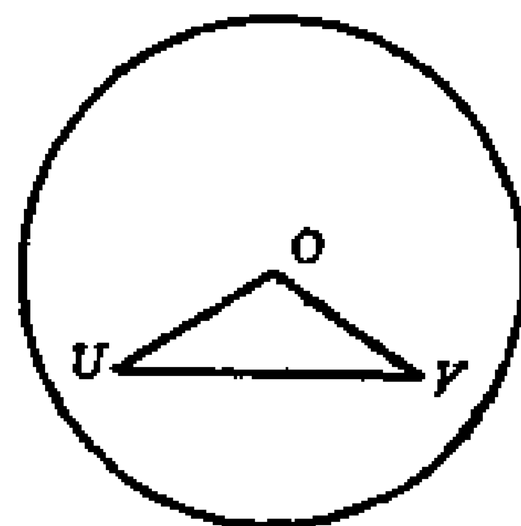


图 88

所以这种人的几何学，实际是黎氏几何学。

3.三种几何学的统一性

在本节中(1)、(2)两款中，圆 c 的 r 若让它变成无限大，则 $d(PQ)$ 便等于我们平常的 $\overline{PQ}$，$Q(pq)$ 便等于我们平常的 $\widehat{pq}$，就是说当 r 变成无限大时；(1)、(2)两款中所说的罗氏几何和黎氏几何都变成了欧氏几何学。

用 K 表示 $\dfrac{-1}{\text{圆 } c \text{ 半径的平方}}$

1° 在(1)中，圆 c 的半径等于 r，所以

$$K = \frac{-1}{r^2} < 0$$

2° 在(2)中，圆 c 的半径等于 ir，所以

$$K = \frac{-1}{(ir)^2} = \frac{1}{r^2} > 0$$

3° 让 r 变成无限大，$K=0$。

所以用 K 来分别三种几何学，便得到下面的结论：

1° $K<0$，所得的几何学是罗氏几何学；

2° $K>0$，所得的几何学是黎氏几何学；

3° $K=0$，所得的几何学是欧氏几何学。

这三种几何学，再一次从射影几何的观点下统一起来了，它所得的结论和曲面几何的结论完全相同。

为了便于理解，可以用三角形的内角和的结论，在上述两种统一方法的情况下，作一个简单地说明：

$$\text{曲率}\quad K=\frac{1}{r^2}\quad r\text{ 是实数。}$$

1° 当 $K=0$ 时，$r\to\infty$ 就是我们已学过的欧氏几何，它的三内角之和 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi$。

2° 当 $K>0$ 时，三角形面积公式

$$E=\frac{1}{K}(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)$$

$$\text{而}\quad K=\frac{1}{r^2}$$

所以 $E=r^2(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)$

$=r^2\lambda$

（λ 是角余 $\angle A+\angle B+\angle C-\pi$）

这是半径为 r 的球面三角形面积公式，它属于黎氏几何学，这时三角形内角和 $\angle A+\angle B+\angle C>\pi$。

3° 当 $K<0$ 时，三角形面积公式

$$E=\frac{1}{K}(\angle A+\angle B+\angle C-\pi)$$

而 $K=-\frac{1}{r^2}$

所以 $E=r^2[\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)]$

$=r^2\delta$（δ是角亏 $\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)$）

如果 $r=\rho$（ρ是罗巴切夫斯基曲率半径.）

于是 $E=\rho^2\cdot\delta$

这是罗巴切夫斯基平面上三角形的面积公式，它实现了罗氏几何三角形三内角的和 $\angle A+\angle B+\angle C<\pi$

另一方面，罗氏几何与黎氏几何又有着一定的联系，如果把黎氏三角形面积公式

$$E=r^2\lambda$$

中的r用ir代替（$i=\sqrt{-1}$），那么就转化为

$$E=r^2\delta$$

再令 $r=\rho$ 就得 $E=\rho^2\delta$ 就转化为罗氏几何中三角形的面积公式了。

最后归纳成下表：

几何体系	平行公理	空间类型	曲率K	远距离情况	三角形内角和	
欧氏几何	在平面上，过已设直线外的一个已知点，最多只可作一条直线与已知直线平行	平面（欧氏）	等于零	无限伸展	等于180°	
罗氏几何	在平面上，过已设直线外的一个已知点，至少可作两条直线与已知直线不相交。	双曲型	小于零	无限伸展	小于180°	
黎氏几何	在平面上，任意两条直线有唯一的交点（任何直线可以无限长但是封闭的）	椭圆型	大于零	自行封闭	大于180°	

13

非欧几何与相对论——对两个问题的回答

谈到这里，我们的问题本来可以暂时告一段落了，但是有同志提出下面两个问题：

（1）非欧几何的逻辑系统和全部论证是可以确信无疑的了，但是在某些图形中，说的是直线，但画起来又是曲线，似乎有些勉强，到底我们的现实世界是平坦的呢，还是弯曲的呢？

（2）在模型解释中，提到尺子变长或变短的问题，到底有没有现实意义呢？在我们的现实世界里是如何解释呢？

这两个问题提得很好，回答起来并不太容易，因为牵涉到爱因斯坦的时空相对论和时空四维几何的知识，这里只能作一些粗略的说明，为大家进一步去阅读这些专著时打一点基础。

（1）爱因斯坦在创立他的广义弯曲空间理论时，包含了这样一项假设："物理空间是在巨大质量的附近变弯曲的。"质量越大，曲率就越大。怎样来检验爱因斯坦这个论断是真实的呢？

我们已经知道，在欧氏几何中，平面三角形三内角的和是等于180°的，非欧几何中的罗巴切夫斯基几何里，三角形三内角的和是小于180°的。黎曼几何里三角形三内角的和是大于

180°的。反过来我们要检验一个面是欧氏平面还是曲面，只要在它们上面各找一个三角形，去测量三角形的内角和便可决定，如果这个三角形的内角和不等于180°，那么这个三角形所在的面就是曲面。我们在前面已知道，三角形的角亏或角余在很小的区域内是很难发现到的。因此这样的三角形的三个顶点间的距离就要充分大才行。我们只有在广阔的宇宙空间去找，而且三角形的边只能用光线去代替，因为我们知道光线是走最短距离的。

在太阳系里，太阳的质量是最大的了，我们就选择太阳作为对象，用精密仪器进行测量。

位于太阳两侧的恒星S_1和S_2射来的光线进入经纬仪，从而测出了它们的夹角θ。然后在太阳离开后，再进行第二次同样的测量，得到夹角θ′，如果比较两次测量的结果，有θ = θ′的话，这时三角形三内角的和等于180°，这说明太阳的质量，并没有使空间弯曲；如果θ ≠ θ′，这时的三角形内角和不等于180°，这说明太阳的质量确实使周围的物理空间变弯曲了，光线是沿曲面上的短程线进入经纬仪的。因此爱因斯坦的弯曲的学说得以证实。

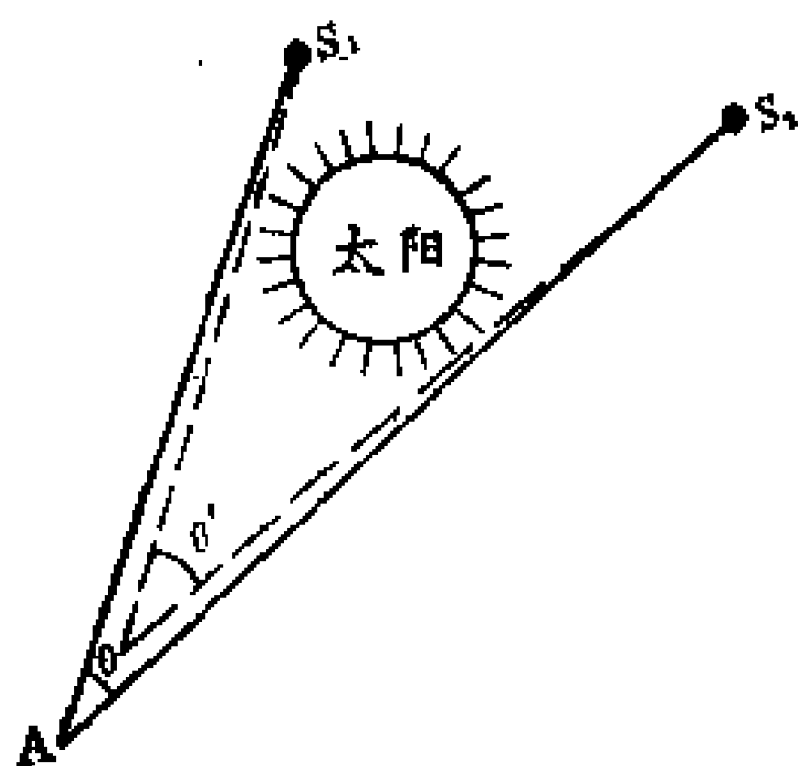


图 89

但是在正常的情况下，进行爱因斯坦这项实

验，有一个明显的障碍：由于太阳的强烈的光芒，我们看不见它周围的星辰，想在白天清楚地看见它们，只有在日全食时才能实现。

1919年，一支英国天文学远征队到达了正好发生日全食的普林西比群岛（西非），进行实际观测，结果发现，两颗恒星的角距离在有太阳和没有太阳的情况下，相差1.61″±0.30″，而爱因斯坦的理论计算值为1.75″。此后又做了各种观测，都得到了相近的结果。

诚然，1.5角秒这个角度并不算大，但已足够证明：太阳的质量确实迫使周围的空间发生弯曲。

如果我们能用其质量更大的星体来代替太阳，欧几里得平面三角形的内角和将会出现若干分，甚至若干度的错误。有充分的理由说明我们所居住的太阳系和更广泛的时空宇宙的确不是欧几里得空间，而是非欧空间。三角形内角和不等于180°的理论，完全与爱因斯坦的时空四维世界相适应。

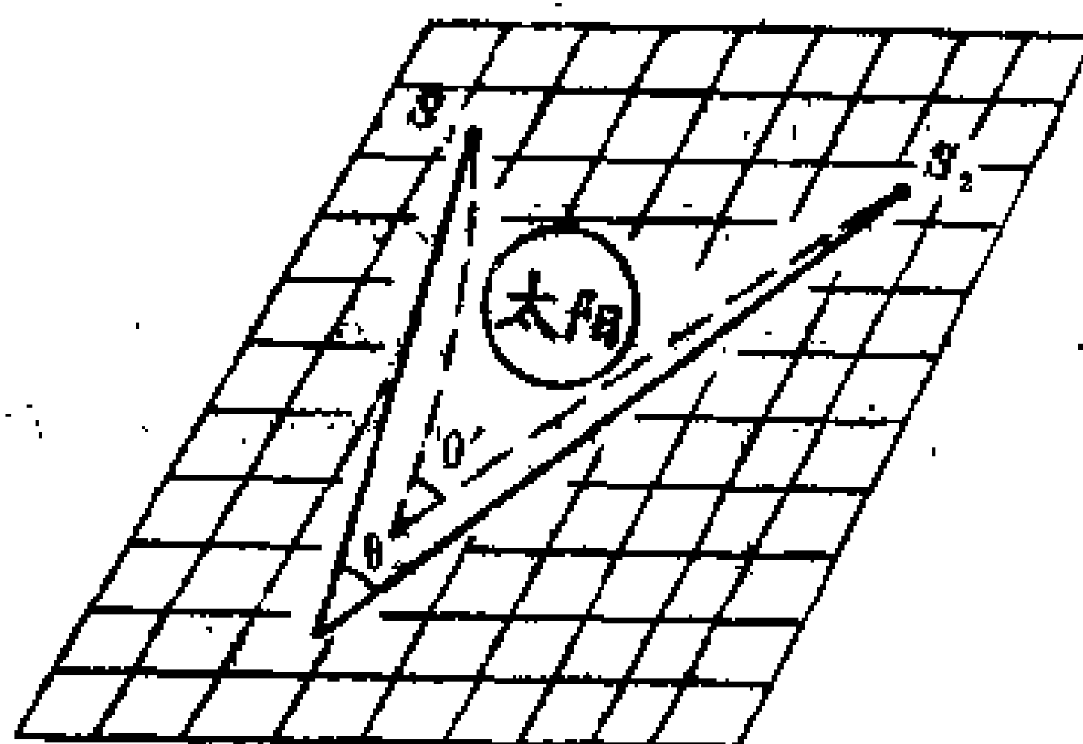


图 90

对于我们居住在三维空间的人来说，要想习惯于这种三维弯曲空间的概念，是需要一个转变过程和培养丰富的空间想象能力的过程的。不过一旦走对了路，它就会同任何古典几何

概念一样明确。

爱因斯坦得出了一个重要的结论：重力现象仅仅是四维时空世界的弯曲所产生的效应。因此关于行星直接接受太阳的作用力而围绕它在圆形轨道上运动这个古老的观点，现在可以认为不合时宜而加以摒弃，代之以更准确地说法，那就是：太阳的质量弯曲了周围的时空世界，行星的时空线正是通过弯曲空间的短程线。所以说：在纯粹的几何空间中，所有的物体都在由其他巨大质量所造成的弯曲空间沿最直的路线（短程线）运动。这个事实说明，我们平日常说的“光线是直线前进”这个概念，并不是象欧氏几何里所设想的那种“笔直”的“直线”，而是在曲面上的短程线，在旁观者看来是曲线，而它自己就认为是直线了。我们在画图时，把弯曲的线说成是直线，不过是为了说明问题的方便而已。其实对于几何学来说，图形是否逼真，并不是重要的东西，也是可有可无的东西，这样的事例很多，有些问题就根本画不出图形来。象时空四维几何中的时间轴 t，就不能用直观的图形表达出来。对于几何学来说，逻辑结构才是最重要的东西。这一点，必须要有足够的认识。

（2）美国物理学家迈克耳逊，1887年做了一个有名的实验证实：物体在滑运动的方向收缩了。这种收缩的大小只与运动的速度有关，而与构成物体的材料本身的强度却根本无关。这种效应就是一种普适效应。

现在让我们用中学里的代数课的“行程问题”来作粗略的解释：

设想有一条河，河中有一艘汽船从A方向行驶到B，然后

再顺流驶回到A。流水在航程的前一半（逆流而上时）起阻挡作用，但在归程（顺流而下时），则助了一臂之力，你或许会认为这两种作用将互相抵消吧？但情况并不如此，就是当

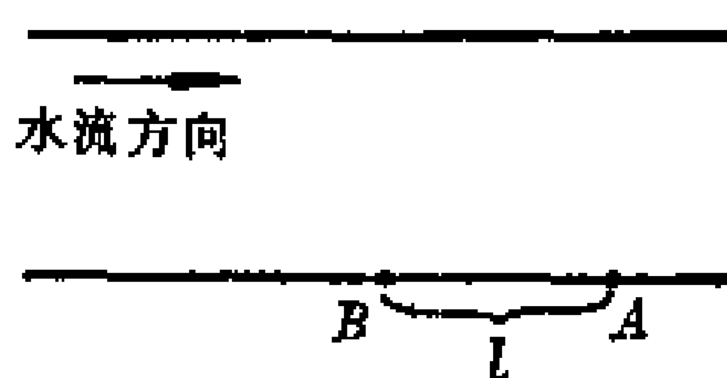


图 91

船在静水中的速度为V，设水流速度为v，V必须大于v，才能逆流而上。如果$V=v$，当然$V-v=0$那么逆流而上的时间将等于AB的距离l除以$(V-v)$，即$\frac{e}{V-v}$。当$V-v=0$时，$\frac{e}{V-v}$不存在，就是说永远不可能到达B点。不难看出，水的流动使整个航程所需的时间增大一个因子

$$\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$$

很明显，往返一次总共需要的时间

$$T=\frac{e}{V-v}+\frac{e}{V+v}=\frac{2Ve}{(V-v)(V+v)}$$

$$=\frac{2Ve}{V^2-v^2}=\frac{2e}{V}\cdot\frac{V^2}{V^2-V^2}$$

$$=\frac{2e}{V}\cdot\frac{1}{\frac{V^2-v^2}{V^2}}=\frac{2e}{V}\cdot\frac{1}{1-\frac{V^2}{V^2}}$$

这个式子表明：如果没有流水的而素，往返AB$=l$的时间应该是$\frac{2l}{V}$，有流水因素时，往返AB$=l$，一次所需的时间为

$\frac{2l}{V}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$即增加了$\frac{1}{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}$倍，

如果汽船是来回横渡的，即汽船从A向对岸的C点来回横渡，情况就不一样了。

设河宽为l，船为了抵消流水的力量，必须稍稍向D点斜驶，才能准确地达到C点。

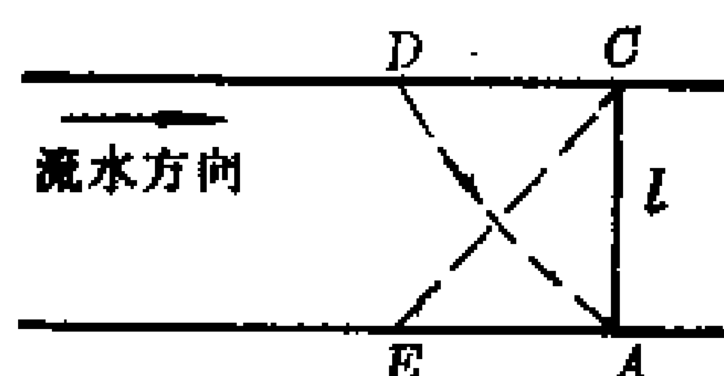


图 92

我们令　$AD=Vt$,　　$DC=vt$

那么$l^2\approx(Vt)^2-(vt)^2$

$$\approx l^2(V^2-v^2)$$

$$t=\sqrt{\frac{l^2}{V^2-v^2}}=\frac{l}{\sqrt{V^2-v^2}}$$

由C点返回A点时的情形也一样$t=\frac{l}{\sqrt{V^2-v^2}}$因此往返横渡一次所需的时间

$$T=\frac{2l}{\sqrt{V^2-V^2}}=\frac{2l}{V}\cdot\frac{V}{\sqrt{V^2-V^2}}$$

$$=\frac{2l}{V}=\frac{2l}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{V^2-V^2}{V^2}}}$$

$$=\frac{2l}{V}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$$

这时所增加的时间比上次少一些，即增加了$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{V}\right)^2}}$倍。

迈克尔逊的实验原理是把一套光学仪器安放在一个固定的台架上，如图所示。

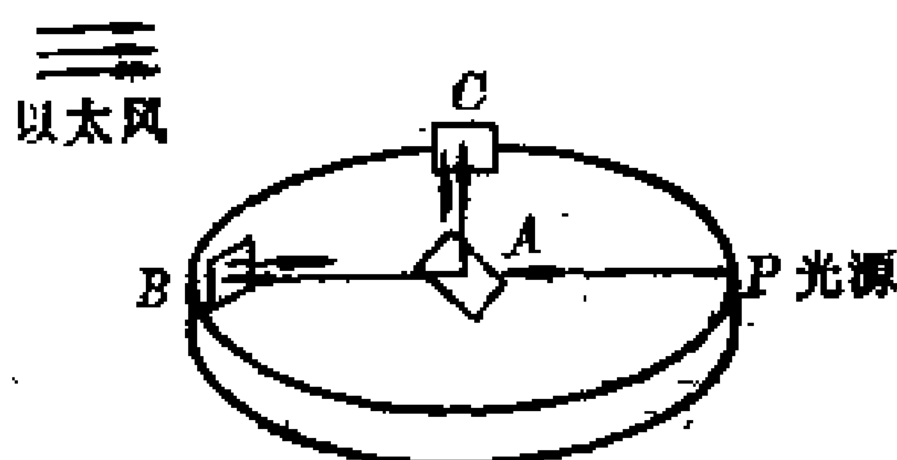


图 93

光源从P射到A后，分成两道，一道射向B再折回到A；一道射向与BA垂直的方向C，再折回到A而AB是地球转动的方向，就是说，相当于以太风从B向A吹去。我们设想光线相当于汽船，以太风相当于流水，从A到B的光线再折回到A所需的时间相当于汽船从A逆流而上到B，再顺流返回A所需的时间。光线从A到C，再折回到A所需的时间相当于汽船从A横渡到C，再返回到A所需的时间。

以太风的速度等于地球运动的速度 $v=30$公里/秒，光的速度$c=3\times10^5$公里/秒，按照前面的计算，光线从A到B再折回

A的时间延长了$\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$倍，

光线从A到C再折回A的时间延长了$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$倍，它们返回到

A的时间应该是不相等的。这是从光学仪器上应该易于观测出来的。

可是在进行这项实验时，迈克尔逊竟未观察到任何时间先后的差异（光波干涉条纹，没有丝毫移动），他感到十分惊异，经过一次又一次的实验，都说明这两条不同方向的光线返回的时间完全相同。这又怎样解释呢？看来唯一合适的解释是大胆假设，迈克尔逊那张架设光学仪器的石制台面沿地球在空间运动的方向有微小的收缩。事实上，如果AB收缩一个因子$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，而$AC$不变，那么，这两束光线耽搁的时间便相同了，就是从$A$到$B$再折回$A$，所耽搁的时间都是

$$\frac{1}{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

这时，两束光线就同时返回A点了。

如果安装光学仪器的那张台子不是用大理石做成的，而是用木质或钢质做成的，也有同样的结果。就是说物体收缩的程度相同。这说明运动着的物体在沿运动的方向收缩，这与运动的速度有关，而与物质无关，所以这种收缩是一种“普适效应”。

按照爱因斯坦1904年在描述这种现象时所提出的看法：我们这里所碰到的是空间本身的收缩。一切物体在以相同速度运动时都收缩同样的速度，其原因完全在于它们都被限制在同一个收缩的空间内。

尽管空间收缩效应对于理解物理学的各种基本原理是很重要的，但日常生活中，却没有人注意到它。这是因为，我们平常所碰到的最高速度，比起光速度来是微不足道的（光速每秒30万公里或每秒18万6千英里）。例如每小时行驶60英里的汽车，

它的长度变为原来的

$$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}=\sqrt{1-(10^{-7})^2}\doteq 0.99999999999999\text{倍}$$

这相当于汽车全长只减少了一个原子核直径那么长，这真是微不足道的了。

不过，如果物体以光速的50%，90%和99%运动，它们的长度就会分别缩短为静止长度的86%，45%和14%了。所以只有当运动接近光速时，才变得较为明显。因为物体缩短的倍数是原来的长度乘以$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$，其中$c$是光速。

另一方面，由于时空的相对性，它的时间却相应的变慢了相同的倍数。更确切地说，运动系统里尺子的长度，等于静止系统（相对的）里的$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$尺长，而运动系统里的秒针走一秒的时间等于静止系统（相对的）里的$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$秒。

必须注意，这种变化是从一个静止的（相对而言）系统对另一个运动的系统而言的。对这个运动系统里的一切事物都以相同程度的长度变短、时间变慢的规律变化着，所以这个运动系统里的动物（例如人类）是没有任何感觉的。由于他自已的身体在缩短，一切都相应的缩短，当然就感觉不到他自己用来量长度的"尺子"也在缩短了。另一方面，一切事物都在相应地变慢，他自己的心脏跳动，新陈代谢，一切动作都在同样地变慢，他当然不会感觉到他的时钟也走得慢了。这些变化只有

在另外一个静止的（也是相对而言）系统的人才能明确地看到。

运动系统中，时间变慢这个情况，为星际旅行提供了一个有趣的现象：假定你打算到天狼星——距离我们约九光年——上去旅行，于是你坐了几乎有光速那么快的飞船（注意光速是一切速度的上限），你大概会认为往返一趟至少要约十八年，因此你打算携带大量食物。不过，如果你乘坐的飞船有近于光速的速度，那么这种小心就是完全多余的了。事实上，如果飞船的速度达到光速的99.99999999%，你的手表、心脏、呼吸、消化和思维都将减慢到七万倍，因此从地球到天狼星往返一趟所花费的十八年（从留在地球上的人看来）在你看来只不过是几小时而已。如果你吃过早饭便从地球出发，那么当你降落在天狼星的某一行星的表面上时，正好可以吃午饭。午饭后，马上返航，就可以赶回地球吃晚饭。不过，如果你忘记了相对论原理的话，那你到家时，准会大吃一惊：因为你的亲友会认为你还在宇宙空间中的什么地方，因而已经自顾自地吃过六千五百七十顿饭了！地球上的十八年，对你这个近于光速的旅客来说，只不过一天而已。这说起来象是神话，但是爱因斯坦的相对论的计算却是实实在在的事情，当然，象接近光速这样大的速度，还有待原子核能量的进一步解放才有可能实现。

现在可以回答同志们所提出的第二个问题，即在非欧几何的模型解释时，提到的所给模型内的人所用的尺子变短或变长的问题。我们把欧氏几何学的观念形态作为是静止（相对而言）系统中的旁观者某甲，而把某乙作为是具有非欧几何的观念形

态运动系统中的某乙。从甲看来，乙在运动系统中随着速度的变化，一切物体的缩短、时间的变慢，随着因子$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$的变化而变化着。而乙自己因为也在作相同的变化，所以没有任何变化的感觉，但局外人的某甲，却看得一清二楚，所以说非欧几何的模型解释是有相对论的事实作为物质基础的。反过来，相对论的理论是非欧几何的一种应用。

关于爱因斯坦的相对论著作，我们看起来是有较大困难的，建议同志们看一些关于这方而的浅易读物。例如《从一到无穷大》的第二部分《空间时间与爱因斯坦》，将会增长不少的知识。对于理解非欧几何的实质，开阔我们的视野，提高我们的空间想象力，都是有益的。

14
结束语

回顾几何学的发展历史，经过了漫长而曲折的道路。自从公元前三世纪欧几里得的《几何原本》问世以来，一直到十九世纪初非欧几何的发现，在这二千多年里，多少数学家，曾致力于欧氏第五公设的试证工作，虽然没有获得成功，但是他们的艰苦劳动并没有白费。相反的，在他们的失败过程中，孕育着非欧几何思想的萌芽。从而导致了罗巴切夫斯基，高斯，约·波里埃等人，各自独立地建立了非欧几何的逻辑体系。接着黎曼又创立了另一流派的非欧几何，因而人们对于空间几何形态，有了进一步的理解。在某些特定条件下，他们之间既可以统一，又可以转化。

从欧氏几何到非欧几何诞生的过程中，我们应该吸取什么教益呢？

首先，对待科学要有科学的态度，这是最重要，最基本的一点。一方面，要尊重科学，相信科学，按科学办事；另一方面，要敢于假设，敢于向权威挑战，敢于创新。任何科学的诞生，都是破除迷信的结果。我们可以想象，当年的罗巴切夫斯基，如果不敢于假设三角形的内角和不等于180°的话，他能创立罗氏几何吗？约·波里埃如果盲从了他父亲的劝告，还能有

自己的建树吗？

对科学除具有科学态度外，还要有为科学而献身的精神。从本书介绍的非欧几何的产生与发展的过程，我们可以看到科学发展的不易，科学上每一个成就的取得，每前进一步，都是经过多人的探索，都需要人付出艰辛的劳动，甚至为之而献身。约·波里埃在对"第五公设"的研究中，虽然没有取得突破，但是，他那种脚踏实地，认真求证，不眠不休，刻苦钻研，把一生的全部精力都献给科学的精神，是多么感人啊！科学的道路，实际上就是无数的科学家用自己的献身精神铺成的。我们虽然不可能人人都成为科学家，但却能在各自的工作领域中，有所创造，有所前进，因此，科学家的这种献身精神，是人人需要学习的，没有这种精神，要想取得任何成就，都是不可能的。

当然，还有一个方法的问题。从欧氏几何到非欧几何，之所以经过了两千年的漫长过程，除了社会发展方面的因素以外，研究不得法，恐怕也是一个不可忽视的原因。许多科学家，只在"第五公设"上兜圈子，从哪里开始，结果，又回到了哪里，就是因为没有一种科学的研究方法来指导他们，现在不同了，我们的青少年从小就受唯物辨证法的训练，这将是我们未来从事工作和学术研究的一把钥匙，我们一定要好好地掌握它。掌握了科学方法，将使我们终生受益。

祝你进步！祝你成功！

[General Information]
□□=□□□□□□□□□180°□
□□=
□□=139
SS□=10068553
□□□□=

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

1 [illegible] 180° [illegible]?

2 [illegible]

3 [illegible]

4 [illegible]

5 [illegible]

6 [illegible]

7 [illegible]

1 [illegible]

2 [illegible]

3 [illegible] ω=π(x)

4 [illegible]

5 [illegible]

6 [illegible] ctg1/2π(x)=ex/p

8 [illegible]

9 [illegible]——[illegible]

10 [illegible]

11 [illegible]——[illegible]

12 [illegible]

13 [illegible]——[illegible]

14 [illegible]